

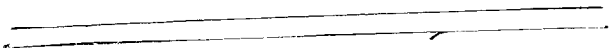
Выпуск № 306

В. В. ГОЛУБЕВ

# ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ РАЗРЕЗНОГО КРЫЛА

ЧАСТЬ II

ПРИБЛИЖЕННАЯ ТЕОРИЯ ПРЕДКРЫЛКА И ЗАКРЫЛКА



## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В первой части изложена теория действия предкрылка, основанная на теории отрыва струй при ламинарном пограничном слое. Условия обтекания крыла, обычно, весьма далеки от тех, при которых можно ожидать ламинарного пограничного слоя у крыла. В настоящей работе этого предположения не делается.

Следуя методу первой части, рассматривается обтекание крыла в присутствии вихря, заменяющего предкрылок или закрылок. Изучение влияния вихря на распределение скоростей на поверхности крыла приводит к следующему заключению: 1) вихрь смещает критическую точку потока у передней кромки; 2) изменяет величину скорости в точках крыла.

Смещение критической точки влечет за собою в случае предкрылка увеличение предельного угла атаки, при котором крыло может работать в условиях полного обтекания и в случае закрылка уменьшение его.

Кроме того предкрылок уменьшает скорость у передней кромки и выравнивает ее на верхней поверхности крыла, а закрылок увеличивает скорость у передней кромки.

Отсюда получается возможность, оставляя крыло в прежних условиях обтекания, увеличить предельный угол атаки на величину  $\Delta_1\theta$ , которая определяется формулой:

$$\Delta_1\theta = 2 \frac{b\beta \sqrt{\rho^2 - 2\rho \cos 2\theta + 1} (\rho + \varepsilon)^2}{L \cdot \rho (\rho^2 - 1) (\rho - 1 + 2\varepsilon) \cos \theta_0},$$

отличающейся от формулы, данной в первой части работы, множителем  $\frac{1}{\cos^2 \theta}$ .

В случае закрылка получается уменьшение предельного угла атаки на величину

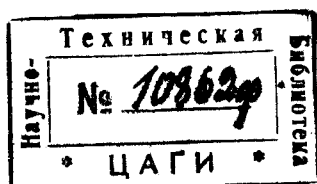
$$\Delta_2\theta = 2 \frac{b\beta \sqrt{\rho^2 + 2\rho \cos 2\theta + 1} (\rho - \varepsilon)^2}{L \cdot \rho (\rho^2 - 1) (\rho + 1 - 2\varepsilon) \cos \theta_0}.$$

Вихри, заменяющие предкрылок или закрылок, меняют общую циркуляцию вокруг составного крыла и вызывают увеличение подъемной силы более значительное в случае закрылка и меньшее в случае предкрылка. В работе даны формулы для вычисления увеличения подъемной силы в случае предкрылка (91) и в случае закрылка (103).

В конце работы изучается совместное действие предкрылка и закрылка.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

	<i>Стр.</i>
Введение . . . . .	3
<b>Глава I. Влияние вихрей, близких к поверхности цилиндра на распределение скоростей</b>	
§ 1. Определение скорости на поверхности цилиндра в присутствии вихрей . . . . .	5
§ 2. Расположение критических точек . . . . .	10
§ 3. Приближенное определение величины $\alpha$ . . . . .	13
§ 4. Влияние вихря на распределение скоростей на поверхности цилиндра . . . . .	15
§ 5. Давление потока на цилиндр в присутствии вихря . . . . .	19
§ 6. Влияние вихря на условия обтекания круглого цилиндра . . . . .	20
<b>Глава II. Влияние предкрылка и закрылка на изменение подъемной силы крыла</b>	
§ 1. Определение интенсивности добавочного вихря . . . . .	22
§ 2. Теория работы предкрылка . . . . .	26
§ 3. Теория работы закрылка . . . . .	31
§ 4. Комбинация предкрылка и закрылка . . . . .	34
§ 5. Сводка формул . . . . .	35
§ 6. Числовые примеры . . . . .	36



## ВВЕДЕНИЕ

В первой части этой работы <sup>1)</sup> было подробно изучено влияние предкрылка на выравнивание скорости вдоль верхней поверхности крыла и на связанное с этим увеличение предельных углов атаки, при которых крыло работает в условиях полного обтекания. Полученные при этом выводы предполагали ламинарность пограничного слоя; кроме того, окончательные формулы были выведены в предположении, что максимальная скорость достигается у передней кромки крыла.

Условия, в которых работает действительное крыло, весьма далеки от тех, при которых можно ожидать ламинарности в пограничном слое; поэтому основное предположение, при котором получены все выводы, оказываются сомнительными. Однако, соображения Кармана, касающиеся структуры пограничного турбулентного слоя, позволяют считать, что пограничный слой состоит из двух частей: слоя непосредственно примыкающего к поверхности обтекаемого тела и представляющего собою ламинарный слой, и слоя турбулентного. Так как можно считать, что отрыв струй начинается на поверхности тела, т. е. в области ламинарного слоя, то полученные выводы останутся верными при условии, что за скорость  $U$  на наружной границе слоя примем скорость  $U_1$  на той поверхности, которая отделяет ламинарную часть слоя от его турбулентной части. Однако, определение  $U_1$  по  $U$  представляет некоторые трудности.

Предположение, что  $U_{max}$  получается у передней кромки несущественно для теории, оно сделано для упрощения дальнейших расчетов. Этому предположению удовлетворяют только очень тонкие крылья. Поэтому такое предположение незаконно для крыльев достаточно толстых ( $\epsilon=0,2$ ;  $\epsilon=0,3$ ), так как для них точка с максимальной скоростью удалена от передней кромки на значительное расстояние; результатом этого является то, что мы сравниваем  $U_0$  не с  $U_{max}$ , а со скоростью, которая значительно меньше. Правда, экспериментальные данные показывают, что при начале срыва струй с верхней поверхности крыла точка с максимальной скоростью перемещается к передней кромке и потому это допущение оказывается, повидимому, ближе к действительности, чем можно было бы думать на основании теоретических соображений. В окончательном итоге мы получаем, что теория, развитая в первой части этой работы, приложима только к случаю очень тонкого крыла, работающего в условиях, при которых создается ламинарный пограничный слой.

Метод, который был применен в предыдущей работе, основан на замене предкрылка вихрем, ось которого неподвижно связана с основной частью крыла; в предыдущей работе влияние этого вихря учитывалось только с точки зрения понижения максимальной скорости потока. Целью

<sup>1)</sup> В. В. Голубев. Исследования по теории разрезного крыла. Ч. 1. Теория предкрылка в плоскопараллельном потоке Труды ЦАГИ, вып. 147, 1933 г.

настоящей работы является всестороннее изучение действия вихрей, близких к поверхности обтекаемого тела, на распределение скоростей на его поверхности.

Важнейший результат, который при этом получается, состоит в том, что вихри влияют на положение критических точек на поверхности обтекаемого тела. При вихрях, заменяющих предкрылок, смещение критических точек получается такое, которое соответствует уменьшению угла атаки. Таким образом, действие предкрылка сводится к следующему:

1) крыло работает в условиях обтекания, которые соответствуют углу атаки, меньшему действительного;

2) при надлежащем размещении предкрылка уменьшается максимальная скорость потока на поверхности крыла и, следовательно, происходит некоторое выравнивание скорости потока.

Эти оба эффекта ведут к увеличению предельных углов, при которых крыло может работать в условиях полного обтекания.

Кажущееся уменьшение угла атаки позволяет подсчитать увеличение предельных углов, причем это увеличение совершенно не зависит от свойств пограничного слоя; настоящая работа и посвящена подробному изучению этого возможного увеличения угла атаки.

Уменьшение максимальной скорости также дает некоторое добавочное увеличение предельного угла атаки. В настоящей работе эта добавочная часть прироста предельного угла атаки получается, исходя из следующего соображения: угол атаки увеличивается настолько, чтобы при увеличенном угле атаки для крыла с предкрылком скорости распределялись так же, как они распределяются при предельном угле атаки крыла без предкрылка. Следовательно, и эта часть совершенно не зависит от характера пограничного слоя и одинаково пригодна и для ламинарного и для турбулентного слоя.

Исходя из этих соображений, получена формула, дающая увеличение предельного угла атаки; интересно отметить, что эта формула весьма мало отличается от формулы, выведенной в первой части работы из совершенно иных соображений.

Методы, применяемые для исследования влияния предкрылка, применены далее и для закрылка. Первая часть работы изучает условия обтекания цилиндра при наличии добавочных вихрей; в ней выводятся основные формулы теории. Вторая часть дает применение этих формул к случаю предкрылка и закрылка.

---

## Г Л А В А I

### ВЛИЯНИЕ ВИХРЕЙ, БЛИЗКИХ К ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРА НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ

#### § 1. Определение скорости на поверхности цилиндра в присутствии вихрей

Пусть имеем цилиндр, сечение которого плоскостью ( $z$ ) дает окружность  $|z|=1$ . Предположим, что на цилиндр набегают поток, имеющий в бесконечности скорость  $V_\infty$ , образующую с действительной осью угол  $\Theta$  (угол атаки); пусть далее около цилиндра имеется циркуляционный поток, циркуляция которого равна  $\Gamma$  и в точке  $a$  около цилиндра ( $|a|>1$ ) помещается вихрь интенсивности  $I$ .

Тогда, полагая  $a = \rho e^{i\mu}$  и  $\bar{a} = \frac{1}{\rho} e^{i\mu}$ , получим для характеристической функции течения вокруг цилиндра выражение:

$$w = V_\infty e^{-\Theta i} \left( z + \frac{e^{2\Theta i}}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z + \frac{I}{2\pi i} \{ \ln(z-a) - \ln(z-\bar{a}) \}, \quad (1)$$

откуда

$$\frac{dw}{dz} = V_\infty e^{-\Theta i} \left( 1 - \frac{e^{2\Theta i}}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} + \frac{I}{2\pi i} \left\{ \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-\bar{a}} \right\}. \quad (2)$$

Имея в виду в дальнейшем переход от цилиндра к случаю крыла, будем считать, что одной из критических точек на цилиндре (точкой схода струй) является точка  $z=1$ .

Тогда, замечая, что при  $z=1$   $\frac{dw}{dz}=0$ , из (2) имеем:

$$0 = V_\infty e^{-\Theta i} (1 - e^{2\Theta i}) + \frac{\Gamma}{2\pi i} + \frac{I}{2\pi i} \left\{ \frac{1}{1-a} - \frac{1}{1-\bar{a}} \right\} \quad (3)$$

и, исключая  $\Gamma$  из (2) и (3), имеем:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{z-1}{z} \left\{ V_\infty e^{-\Theta i} \left( 1 + \frac{e^{2\Theta i}}{z} \right) - \frac{I}{2\pi i} \frac{a-\bar{a}}{(1-a)(1-\bar{a})} \cdot \frac{z-\bar{a}}{(z-a)(z-\bar{a})} \right\}. \quad (4)$$

Так как

$$\frac{a-\bar{a}}{(1-a)(1-\bar{a})} = \frac{\rho - \frac{1}{\rho}}{2 \cos \mu - \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right)} = - \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 - 2\rho \cos \mu + 1}$$

есть число действительное, то положим, что

$$\frac{I(a-\bar{a})}{2\pi(1-a)(1-\bar{a})} = A, \quad (5)$$

где  $A$  — действительное число. Тогда уравнение (4) примет вид:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{z-1}{z} \left\{ V_{\infty} e^{-\theta i} \left( 1 + \frac{e^{2\theta i}}{z} \right) + iA \frac{z - aa}{(z-a)(z-\bar{a})} \right\}. \quad (6)$$

Чтобы получить величину скорости на поверхности цилиндра, положим в (6)  $z = e^{\varphi i}$ ; тогда

$$\frac{dw}{dz} = \frac{e^{\varphi i} - 1}{e^{\varphi i}} \left\{ V e^{-\theta i} (1 + e^{(2\theta - \varphi)i}) + iA \frac{e^{\varphi i} - e^{2\mu i}}{e^{2\varphi i} - \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) e^{\mu i + \varphi i} + e^{2\mu i}} \right\}. \quad (7)$$

Но

$$\begin{aligned} e^{-\theta i} (1 + e^{(2\theta - \varphi)i}) &= e^{-\frac{\varphi}{2} i} \left[ e^{-(\theta - \frac{\varphi}{2})i} + e^{(\theta - \frac{\varphi}{2})i} \right] = \\ &= 2 \cos \left( \theta - \frac{\varphi}{2} \right) e^{-\frac{\varphi}{2} i}; \end{aligned}$$

также:

$$\begin{aligned} \frac{e^{\varphi i} - e^{2\mu i}}{e^{2\varphi i} - \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) e^{\mu i + \varphi i} + e^{2\mu i}} &= e^{-\frac{\varphi}{2} i} \frac{e^{\left(\frac{\varphi}{2} - \mu\right)i} - e^{-\left(\frac{\varphi}{2} - \mu\right)i}}{2 \cos (\varphi - \mu) - \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)} = \\ &= 2ie^{-\frac{\varphi}{2} i} \frac{\sin \left( \frac{\varphi}{2} - \mu \right)}{2 \cos (\varphi - \mu) - \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)} \end{aligned}$$

и

$$\frac{e^{\varphi i} - 1}{e^{\varphi i}} = e^{-\frac{\varphi}{2} i} \left( e^{-\frac{\varphi}{2} i} - e^{\frac{\varphi}{2} i} \right) = 2ie^{-\frac{\varphi}{2} i} \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Подставляя все эти значения в уравнение (6), приведем его к виду:

$$\frac{dw}{dz} = 2ie^{-\frac{\varphi}{2} i} \sin \frac{\varphi}{2} \left\{ V_{\infty} 2 \cos \left( \theta - \frac{\varphi}{2} \right) - A \frac{2 \sin \left( \frac{\varphi}{2} - \mu \right)}{2 \cos (\varphi - \mu) - \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)} \right\}$$

или, полагая

$$\frac{A}{2V_{\infty}} = K$$

и

$$r = \frac{1}{2} \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right) \quad (r > 1), \quad (7)$$

имеем окончательно:

$$\frac{dw}{dz} = 4V_{\infty} e^{-\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)i} \sin \frac{\varphi}{2} \left[ \cos \left( \theta - \frac{\varphi}{2} \right) - K \frac{\sin \left( \frac{\varphi}{2} - \mu \right)}{\cos (\varphi - \mu) - r} \right]. \quad (8)$$

Найдем теперь положение остальных критических точек. Здесь отметим, прежде всего, один интересный и простой частный случай.

Пусть  $\mu = \pm \frac{\pi}{2}$ , тогда

$$\sin \left( \frac{\varphi}{2} - \mu \right) = \sin \left( \frac{\varphi}{2} - \theta \mp \frac{\pi}{2} \right) = \mp \cos \left( \theta - \frac{\varphi}{2} \right).$$

Следовательно, уравнение (8) принимает вид:

$$\frac{dw}{dz} = 4V_{\infty} e^{-\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)i} \sin \frac{\varphi}{2} \sin \left( \frac{\varphi - (2\theta \pm \pi)}{2} \right) \left[ 1 \pm \frac{K}{\cos \left( \varphi - \theta \mp \frac{\pi}{2} \right) - r} \right] \quad (8')$$

и потому двумя критическими точками течения служат точки:

$$\varphi_1 = 0; \quad \varphi_2 = 2\theta + \pi,$$

т. е. в этом случае положение двух критических точек остается такое же, как если бы добавочного вихря не было.

Но, кроме двух найденных критических точек, в этом случае окажутся еще две, положение которых определится из решения уравнения

$$1 \pm \frac{K}{\cos \left( \varphi - \theta \mp \frac{\pi}{2} \right) - r} = 0,$$

откуда

$$\sin (\varphi - \theta) = -K \pm r$$

и

$$\varphi_3 = \theta + \lambda; \quad \varphi_4 = \theta + (\pi - \lambda), \quad (9)$$

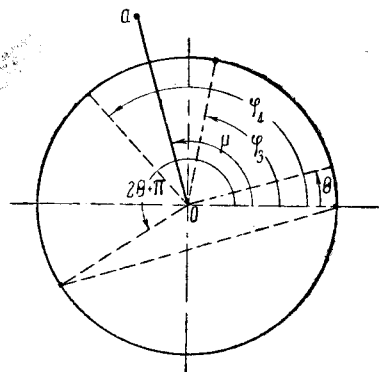
где

$$\lambda = \arcsin (\pm r - K). \quad (10)$$

Формула (10) показывает, что критические точки  $\varphi_3$  и  $\varphi_4$  окажутся действительными при  $|r \pm K| \leq 1$ ; при  $|r \pm K| > 1$  углы, соответствующие значениям  $\varphi_3$  и  $\varphi_4$ , окажутся комплексными.

В случае действительных  $\varphi_3$  и  $\varphi_4$  расположение критических точек, как показывает фиг. 1, оказывается симметричным относительно прямой  $Oa$ , соединяющей ось цилиндра с осью добавочного вихря.

Разобранный частный случай показывает, что число критических точек на цилиндре в общем случае будет равно четырем, из которых одна ( $\varphi = 0$ ) известна. Таким образом, нахождение трех остальных точек может быть сведено к решению некоторого кубического уравнения, которое легко получить. Действительно, из (8) видим, что три критические точки найдутся из уравнения:



Фиг. 1.

$$\cos \left( \theta - \frac{\varphi}{2} \right) [\cos (\varphi - \mu) - r] - K \sin \left( \frac{\varphi}{2} - \mu \right) = 0.$$

Это уравнение может быть переписано в виде:

$$\begin{aligned} & \left( \cos \theta \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \theta \sin \frac{\varphi}{2} \right) \left[ \left( \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) \cos \mu + \right. \\ & \left. + 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \sin \mu - r \left( \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) \right] - K \left( \sin \frac{\varphi}{2} \cos \mu - \right. \\ & \left. - \cos \frac{\varphi}{2} \sin \mu \right) \left( \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) = 0, \end{aligned}$$

откуда, деля на  $\cos^3 \frac{\varphi}{2}$  и, полагая  $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = Z$ , имеем уравнение:

$$\begin{aligned} -Z^3 \left[ \operatorname{tg} \Theta (\cos \mu + r) + K \frac{\cos \mu}{\cos \Theta} \right] + Z^3 \left[ -(\cos \mu + r) + 2 \sin \mu \operatorname{tg} \Theta + \right. \\ \left. + K \frac{\cos \mu}{\cos \Theta} \operatorname{tg} \mu \right] + Z \left[ \operatorname{tg} \Theta (\cos \mu - r) + 2 \sin \mu - K \frac{\cos \mu}{\cos \Theta} \right] + \\ + \left[ (\cos \mu - r) + M \operatorname{tg} \mu \right] = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Решения уравнения (11) и определяют положение трех критических точек на поверхности цилиндра.

Действительное решение уравнения (11) приводит к большим вычислениям, поэтому представляется интересным обойти эти вычисления, дав подходящий приближенный метод определения его корней. Очевидно, что если бы был найден один из корней уравнения (11), то нахождение двух остальных корней не представило бы больших затруднений; в дальнейшем мы укажем весьма простой способ определения одного из корней.

Пусть, таким образом, мы из каких-нибудь соображений определили один из корней уравнения (11); назовем его  $\alpha$ . Тогда из (8) имеем:

$$\cos \left( \Theta - \frac{\alpha}{2} \right) - K \frac{\sin \left( \frac{\alpha}{2} - \mu \right)}{\cos (\alpha - \mu) - r} = 0. \quad (12)$$

Исключая  $K$  из уравнения:

$$\cos \left( \Theta - \frac{\varphi}{2} \right) - K \frac{\sin \left( \frac{\varphi}{2} - \mu \right)}{\cos (\varphi - \mu) - r} = 0 \quad (13)$$

и из (12), имеем:

$$\cos \left( \Theta - \frac{\varphi}{2} \right) - \cos \left( \Theta - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{\sin \left( \frac{\varphi}{2} - \mu \right)}{\sin \left( \frac{\alpha}{2} - \mu \right)} \cdot \frac{\cos (\alpha - \mu) - r}{\cos (\varphi - \mu) - r} = 0. \quad (14)$$

Отсюда для определения двух остальных критических точек имеем уравнение:

$$\begin{aligned} \cos \left( \Theta - \frac{\varphi}{2} \right) \sin \left( \frac{\alpha}{2} - \mu \right) \cos (\varphi - \mu) - \cos \left( \Theta - \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left( \frac{\varphi}{2} - \mu \right) \times \\ \times \cos (\alpha - \mu) - r \left[ \cos \left( \Theta - \frac{\varphi}{2} \right) \sin \left( \frac{\alpha}{2} - \mu \right) - \cos \left( \Theta - \frac{\alpha}{2} \right) \times \right. \\ \left. \times \sin \left( \frac{\varphi}{2} - \mu \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Применяя формулу:

$$\cos A \sin B \cos C = \frac{1}{4} [\sin (A+B+C) + \sin (A+B-C) + \sin (B-A+C) + \sin (B-A-C)],$$

приведем уравнение (15) к виду:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \sin \frac{|\alpha - \varphi|}{2} [\cos (\Theta - \varphi) + \cos (\Theta - \alpha) + \cos \Theta - \cos (\alpha + \varphi - \Theta - 2\mu) - \\ - 2r \cos (\Theta - \mu)] = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Следовательно, два последние корня найдутся из уравнения:

$$\begin{aligned} \cos (\Theta - \varphi) + \cos (\Theta - \alpha) + \cos \Theta - \cos (\alpha + \varphi - \Theta - 2\mu) - \\ - 2r \cos (\Theta - \mu) = 0 \end{aligned} \quad (16')$$

или:

$$2 \sin \left( \frac{\alpha}{2} - \mu \right) \sin \left( \frac{\alpha}{2} + \varphi - \Theta - \mu \right) = 2r \cos (\Theta - \mu) - \cos (\Theta - \alpha) - \cos \Theta,$$

откуда

$$\varphi_2 = \Theta + \mu - \frac{\alpha}{2} + \lambda; \quad \varphi_3 = \Theta + \mu - \frac{\alpha}{2} + \pi - \lambda \quad (17)$$

и

$$\lambda = \arcsin \frac{2r \cos (\Theta - \mu) - \cos (\Theta - \alpha) - \cos \Theta}{2 \sin \left( \frac{\alpha}{2} - \mu \right)}$$

или

$$\lambda = \arcsin \frac{r \cos (\Theta - \mu) - \cos \left( \Theta - \frac{\alpha}{2} \right) \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \left( \frac{\alpha}{2} - \mu \right)}. \quad (18)$$

Найденные корни назовем  $\beta (= \varphi_2)$  и  $\gamma (= \varphi_3)$ .

Введя корни  $\beta$  и  $\gamma$  в формулу (8), можно привести ее к следующему симметричному виду.

Так как  $\beta$  удовлетворяет уравнению (16'), то

$$\cos (\Theta - \beta) + \cos (\Theta - \alpha) + \cos \Theta - \cos (\alpha + \beta - \Theta - 2\mu) - 2r \cos (\Theta - \mu) = 0,$$

а потому

$$\begin{aligned} & \cos (\Theta - \varphi) + \cos (\Theta - \alpha) + \cos \Theta - \cos (\alpha + \varphi - \Theta - 2\mu) - 2r \cos (\Theta - \mu) = \\ & = \cos (\Theta - \varphi) - \cos (\Theta - \beta) - [\cos (\alpha + \varphi - \Theta - 2\mu) - \cos (\alpha + \beta - \Theta - 2\mu)] = \\ & = 2 \sin \left( \Theta - \frac{\varphi + \beta}{2} \right) \sin \frac{\varphi - \beta}{2} + 2 \sin \left( \frac{\varphi + \beta}{2} - \Theta - 2\mu + \alpha \right) \sin \frac{\varphi - \beta}{2} = \\ & = 2 \sin \frac{\varphi - \beta}{2} \cdot 2 \sin \left( \frac{\alpha}{2} - \mu \right) \cos \left( \frac{\varphi + \beta}{2} - \Theta - \mu + \frac{\alpha}{2} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Выражение (19) обращается в 0 при  $\varphi = \beta$  и при

$$\frac{\varphi + \beta}{2} - \Theta - \mu + \frac{\alpha}{2} = \pm \frac{\pi}{2},$$

откуда

$$\varphi = 2\Theta + 2\mu \pm \pi - \beta - \alpha.$$

Подставляя сюда значение

$$\beta = \Theta + \mu - \frac{\alpha}{2} + \lambda,$$

имеем

$$\varphi = \Theta + \mu - \frac{\alpha}{2} \pm \pi - \lambda.$$

Так как, очевидно, достаточно взять в выражении  $c + \pi$ , то отсюда видим, что

$$\varphi = \gamma.$$

Подставляя в (19) вместо  $\beta$  его значение, приведем (19) к виду:

$$4 \sin \frac{\varphi - \beta}{2} \sin \frac{\varphi - \gamma}{2} \sin \left( \frac{\alpha}{2} - \mu \right). \quad (20)$$

Подставляя найденные выражения в формулу (8), получим:

$$\frac{dw}{dz} = 4V_{\infty} e^{-\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)i} \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin \frac{\alpha - \varphi}{2} \cdot \frac{4 \sin \frac{\varphi - \beta}{2} \sin \frac{\varphi - \gamma}{2} \sin \left( \frac{\alpha}{2} - \mu \right)}{\sin \left( \frac{\alpha}{2} - \mu \right) [\cos (\varphi - \mu) - r]}.$$

Окончательно:

$$\frac{dw}{dz} = 8Ve_{\infty} - \left( \varphi + \frac{\pi}{2} \right) i \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} \sin \frac{\varphi - \beta}{2} \sin \frac{\varphi - \gamma}{2} \cdot \frac{1}{r - \cos(\varphi - \mu)}. \quad (21)$$

Такова окончательная формула, дающая выражение скорости течения на поверхности обтекаемого цилиндра.

## § 2. Расположение критических точек

Между углами, определяющими положение критических точек, существует замечательное соотношение. При отсутствии добавочных вихрей точкою разветвления струй является точка  $z = e^{(2\theta + \pi)i}$ . Пусть  $e^{ai}$  соответствующая смещенная точка при наличии добавочных вихрей. Назовем  $\alpha - (2\theta + \pi) = 2\delta$  смещением первой критической точки; точно так же положим  $\beta - \mu = \delta_1$  и  $\gamma - \mu = \delta_2$  и назовем  $\delta_1$  и  $\delta_2$  также смещениями критических точек. Из написанных равенств имеем:

$$\begin{aligned} \alpha &= 2\theta + \pi + 2\delta, \\ \beta &= \mu + \delta_1, \\ \gamma &= \mu + \delta_2. \end{aligned} \quad (22)$$

С другой стороны, складывая равенства (17), где  $\varphi_2 = \beta$  и  $\varphi_3 = \gamma$ , имеем:

$$\beta + \gamma = 2\theta + 2\mu - \alpha + \pi$$

или

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\theta + 2\mu + \pi.$$

Отсюда, заменяя  $\alpha, \beta, \gamma$  по (22), имеем:

$$2\delta + \delta_1 + \delta_2 = 0, \quad (23)$$

т. е. сумма смещений критических точек под дей-

ствием добавочных вихрей равна нулю (фиг. 2).

Легко показать, что это свойство остается верным при любом числе добавочных вихрей и при любом их расположении. Для доказательства этого обобщим формулу (21) на случай любого числа вихрей, произвольно расположенных вне цилиндра.

Характеристическая функция потока, обтекающего цилиндр при любом расположении вихрей вне его в самом общем виде может быть написана в виде:

$$w = Ve^{-\theta i} \left( z + \frac{e^{2\theta i}}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z + \sum_{k=1}^n \frac{I_k}{2\pi i} \ln \frac{z - a_k}{z - \bar{a}_k}, \quad (24)$$

где

$$a_k = \rho_k e^{i\mu_k} (\rho_k > 1) \text{ и } \bar{a}_k = \frac{1}{\rho_k} e^{i\mu_k}.$$

Отсюда

$$\frac{dw}{dz} = Ve^{-\theta i} \left( 1 - \frac{e^{2\theta i}}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^n \frac{I_k}{2\pi i} \left\{ \frac{1}{z - a_k} - \frac{1}{z - \bar{a}_k} \right\}. \quad (25)$$

Если привести правую часть (25) к общему знаменателю, то, очевидно, получим в правой части рациональную дробь, числитель которой имеет степень такую же, как знаменатель. Разлагая числителя на множители, имеем окончательно уравнение вида:

$$\frac{dw}{dz} = Ve^{-\Theta i} \frac{(z-m)(z-p)}{z^2} \prod_1^n \frac{(z-m_k)(z-p_k)}{(z-a_k)(z-b_k)}. \quad (26)$$

Предположим, что все точки  $m, p, m_k, p_k$  лежат на поверхности цилиндра и, следовательно, являются критическими точками потока. Полагая  $m=e^{\alpha i}$ ;  $p=e^{\beta i}$ ;  $m_k=e^{\alpha_k i}$ ;  $p_k=e^{\beta_k i}$ , имеем для (26) следующее выражение на поверхности цилиндра:

$$\frac{dw}{dz} = Ve^{-\Theta i} \frac{(e^{\varphi i} - e^{\alpha i})(e^{\varphi i} - e^{\beta i})}{e^{2\varphi i}} \prod_1^n \frac{(e^{\varphi i} - e^{\alpha_k i})(e^{\varphi i} - e^{\beta_k i})}{(e^{\varphi i} - \rho e^{\mu_k i}) \left( e^{\varphi i} - \frac{1}{\rho} e^{\mu_k i} \right)}. \quad (27)$$

Но из равенства:

$$e^{\varphi i} - e^{\alpha i} = e^{\frac{\varphi + \alpha}{2} i} \left( e^{\frac{\varphi - \alpha}{2} i} - e^{-\frac{\varphi - \alpha}{2} i} \right) = 2ie^{\frac{\varphi + \alpha}{2} i} \sin \frac{\varphi - \alpha}{2}$$

и т. д. и

$$\begin{aligned} (e^{\varphi i} - \rho e^{\mu i}) \left( e^{\varphi i} - \frac{1}{\rho} e^{\mu i} \right) &= e^{2\varphi i} - \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right) e^{(\varphi + \mu) i} + e^{2\mu i} = \\ &= e^{(\varphi + \mu) i} \left[ 2 \cos (\varphi - \mu) - \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right) \right] = e^{(\varphi + \mu) i} 2 \{ \cos (\varphi - \mu) - r \}; \end{aligned}$$

аналогично получим:

$$(e^{\varphi i} - e^{\alpha i})(e^{\varphi i} - e^{\beta i}) = -4e^{\left( \varphi + \frac{\alpha + \beta}{2} \right) i} \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} \sin \frac{\varphi - \beta}{2};$$

окончательно имеем:

$$\prod_1^n \frac{(e^{\varphi i} - e^{\alpha_k i})(e^{\varphi i} - e^{\beta_k i})}{(e^{\varphi i} - \rho_k e^{\mu_k i}) \left( e^{\varphi i} - \frac{1}{\rho_k} e^{\mu_k i} \right)} = \prod_1^n \frac{-4e^{\left( \varphi + \frac{\alpha_k + \beta_k}{2} \right) i} \sin \frac{\varphi - \alpha_k}{2} \sin \frac{\varphi - \beta_k}{2}}{-2e^{(\varphi + \mu_k) i} \{ r_k - \cos (\varphi - \mu_k) \}},$$

где

$$r_k = \frac{1}{2} \left( \rho_k + \frac{1}{\rho_k} \right).$$

После подстановки этих выражений в уравнение (27), имеем:

$$\frac{dw}{dz} = Ve^{-\Theta i} \frac{4e^{\left( \varphi + \frac{\alpha + \beta}{2} \right) i} \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} \sin \frac{\varphi - \beta}{2}}{e^{2\varphi i}} \prod_1^n \frac{2e^{\left( \frac{\alpha_k + \beta_k}{2} - \mu_k \right) i} \sin \frac{\varphi - \alpha_k}{2} \sin \frac{\varphi - \beta_k}{2}}{r_k - \cos (\varphi - \mu_k)}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= -2^{n+2} Ve^{-\Theta i} \cdot e^{\left( \frac{\alpha + \beta}{2} - \varphi \right) i} + \sum_1^n \left( \frac{\alpha_k + \beta_k}{2} - \mu_k \right) i \times \\ &\times \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} \sin \frac{\varphi - \beta}{2} \prod_1^n \frac{\sin \frac{\varphi - \alpha_k}{2} \sin \frac{\varphi - \beta_k}{2}}{r_k - \cos (\varphi - \mu_k)}. \end{aligned} \quad (28)$$

Рассмотрим случай, когда  $\varphi > \alpha$ ;  $\varphi > \beta$ ;  $\varphi > \alpha_k$ ;  $\varphi > \beta_k$  (фиг. 3); тогда, называя через  $V_\varphi$  величину скорости в рассматриваемой точке цилиндра, имеем:

$$\frac{dw}{dz} = V_\varphi \cdot e^{-\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)i}. \quad (29)$$

Уравнение (28) можем переписать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} = & V \cdot 2^{n+2} e^{-\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)i} \cdot e^{\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\pi}{2} - \theta\right)i} \times \\ & \times e^{\sum_1^n \left(\frac{\alpha_k + \beta_k}{2} - \mu_k\right)i} \cdot \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} \sin \frac{\varphi - \beta}{2} \prod_1^n \frac{\sin \frac{\varphi - \alpha_k}{2} \sin \frac{\varphi - \beta_k}{2}}{r_k - \cos(\varphi - \mu_k)}. \end{aligned} \quad (30)$$

Сравнивая (29) с (30), имеем:

$$\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\pi}{2} - \theta + \sum_1^n \left(\frac{\alpha_k + \beta_k}{2} - \mu_k\right) = 2\pi N, \quad (31)$$

где  $N$  — некоторое целое число.

При отсутствии всех вихрей (т. е. когда  $\Gamma = 0$  и  $I_k = 0$ ) критические точки находятся в  $z_1 = e^{\theta i}$ ,  $z_2 = e^{(\theta + \pi)i}$ ; назовем смещениями критических точек величины  $\alpha - (\theta + \pi) = \delta'$  и  $\beta - \theta = \delta''$ ; точно так же назовем смещениями  $\alpha_k - \mu_k = \delta_k'$ ;  $\beta_k - \mu_k = \delta_k''$ . Отсюда:

$$\begin{aligned} \alpha &= \theta + \pi + \delta'; \quad \beta = \theta + \delta''; \quad \alpha_k = \mu_k + \delta_k'; \\ \beta_k &= \mu_k + \delta_k''. \end{aligned} \quad (32)$$

Подставляя значения (32) в уравнение (31), имеем:

$$\begin{aligned} \theta + \frac{\pi}{2} + \frac{\delta' + \delta''}{2} - \frac{\pi}{2} - \theta + \\ + \sum \left\{ \mu_k + \frac{\delta_k' + \delta_k''}{2} - \mu_k \right\} = 2\pi N \end{aligned}$$

$$\frac{\delta' + \delta''}{2} + \sum_1^n \frac{\delta_k' + \delta_k''}{2} = 2\pi N. \quad (33)$$

Чтобы определить величину  $N$ , заметим, что при очень малых  $\Gamma$  и  $I_k$  величины  $\delta'$ ,  $\delta''$ ,  $\delta_k'$ ,  $\delta_k''$  сколь угодно малы; следовательно  $N$  может быть только нулем. Итак, имеем равенство:

$$\delta' + \delta'' + \sum_1^n (\delta_k' + \delta_k'') = 0, \quad (34)$$

т. е. сумма всех смещений критических точек при любом расположении добавочных вихрей равно нулю<sup>1)</sup>.

1) Можно показать, что это свойство остается верным и при отсасывании воздуха через щель в крыле. Другое доказательство см. В. В. Голубев. Обтекание цилиндра потоком в присутствии системы неподвижных вихрей. Уч. зап. МГУ. 1936.

Воспользовавшись равенством (34), приведем уравнение (30) к виду:

$$\frac{dw}{dz} = 2^{n+2} V e^{-\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)i} \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} \sin \frac{\varphi - \beta}{2} \prod_1^n \frac{\sin \left(\frac{\varphi - \alpha_k}{2}\right) \sin \left(\frac{\varphi - \beta_k}{2}\right)}{r_k - \cos(\varphi - \mu_k)}. \quad (35)$$

Это уравнение является обобщением уравнения (21) на случай любого числа вихрей; уравнение (21) получается из (35) при  $n=1$ .

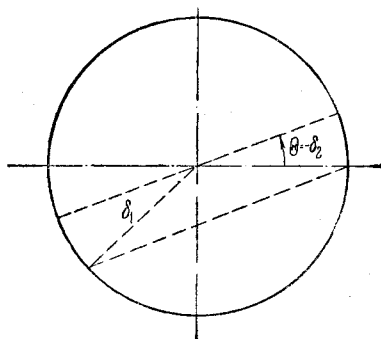
В простейшем случае цилиндра с циркуляцией, но без добавочных вихрей на конечном расстоянии уравнение (34) дает

$$\delta' + \delta'' = 0. \quad (36)$$

Уравнение (36) выражает известное свойство обтекания потоком цилиндра при наличии циркуляции. Это свойство обычно выражается так: хорда, соединяющая критические точки на цилиндре, параллельна скорости потока в бесконечности.

В случае одного добавочного вихря на конечном расстоянии уравнение (23) показывает, что при  $2\delta=0$  имеем

$$\delta_1 + \delta_2 = 0.$$



Фиг. 4.

Это случай, разобранный выше [см. формулу (9)]. В этом случае хорда, соединяющая критические точки, получающиеся от действия добавочного вихря, также параллельна скорости потока в бесконечности (фиг. 4).

### § 3. Приближенное определение величины $\alpha$

Предшествующие исследования показывают, что вопрос о положении критических точек разрешается очень просто, если найти положение одной из критических точек.

Покажем прием который позволяет найти положение критической точки, в которой разделяется поток, набегающий на крыло. Экспериментальные данные показывают, что смещение под действием дополнительных вихрей, заменяющих предкрылок, критической точки разделения потока незначительно. Пользуясь этим соображением, положим, что

$$\alpha = \pi + 2\theta + 2\delta, \quad (37)$$

где  $\delta$ —величина малая. Подставляя значение (37) в уравнение (12), имеем:

$$\cos \left( \theta - \frac{\pi}{2} - \theta - \delta \right) - K \frac{\sin \left( \frac{\pi}{2} + \theta + \delta - \mu \right)}{\cos (\pi + 2\theta + 2\delta - \mu) - r} = 0$$

или

$$\sin \delta [r + \cos (2\theta + 2\delta + \mu)] + K \cos (\theta - \mu - \delta) = 0.$$

Заменяя по малости  $\delta$  выражения  $\sin \delta$  и  $\cos \delta$  соответственно через  $\delta$  и 1, имеем:

$$-\delta [r + \cos (2\theta + \mu) + K [\cos (\theta - \mu) - \delta \sin (\theta - \mu)]] = 0,$$

откуда:

$$\delta = \frac{K \cos (\theta - \mu)}{r + \cos (2\theta + \mu) + K \sin (\theta - \mu)}. \quad (38)$$

Рассмотрим два крайних случая, соответствующих предкрылку и за-крылку. В случае предкрылка  $\mu$  близко к  $\pi$ ; в случае закрылка  $\mu$  близко к 0. Мы рассмотрим случай  $\mu=0$  и  $\mu=\pi$ .

1.  $\mu=0$ .

Формула (38) принимает вид:

$$\delta = \frac{K \cos \theta}{r + \cos 2\theta + K \sin \theta}. \quad (39)$$

Здесь угол  $\theta$  порядка  $15-25^\circ$  и, следовательно,  $\delta$  может быть величиной малою только вследствие малости  $K$ , а потому мы можем заменить (39) следующей приближенной формулой:

$$\delta = \frac{K \cos \theta}{r + \cos 2\theta}. \quad (40)$$

2.  $\mu=\pi$ .

Формула (38) принимает вид:

$$\delta = - \frac{K \cos \theta}{r - \cos 2\theta - K \sin \theta} \quad (39')$$

и, следовательно,  $\delta$  может быть величиной малой только вследствие малости  $K$ , а потому и здесь мы можем заменить (39') следующей приближенной формулой:

$$\delta = - \frac{K \cos \theta}{r - \cos 2\theta}. \quad (40')$$

Так как при обычном расположении предкрылка и закрылка циркуляции  $I$  и  $\Gamma$  одного знака, то, как показывают формулы (41) и (41') для закрылка  $\delta_1$  положительно и для предкрылка  $\delta_2$  отрицательно.

Рассмотрим более подробно величину  $K$ . Из равенств (7) и (5) имеем:

$$K = \frac{I(a-a)}{4\pi V_\infty (1-a)(1-a)},$$

или, подставляя

$$a = \rho e^{i\mu}, \quad \bar{a} = \frac{1}{\rho} e^{-i\mu}, \quad r = \frac{1}{2} \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right)$$

и

$$d = \frac{1}{2} \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right),$$

получим

$$K = - \frac{I}{4\pi V_\infty} \frac{d}{r - \cos \mu}. \quad (40'')$$

При отсутствии предкрылка циркуляция  $\Gamma$  определяется по формуле (3) при  $I=0$ :

$$\Gamma = 2\pi i V_\infty (e^{\theta i} - e^{-\theta i}) = -4\pi V_\infty \sin \theta.$$

Следовательно, по (41) имеем:

$$K = \frac{I}{\Gamma} \frac{d \sin \theta}{r - \cos \mu}$$

и по (40) и (40'')

$$\delta = \frac{I}{\Gamma} \frac{d \sin \theta \cdot \cos (\mu - \theta)}{(r - \cos \mu)(r + \cos (2\theta + \mu))},$$

откуда при  $\mu=0$  (закрылок):

$$\delta_1 = \frac{I}{\Gamma} \frac{\sin \theta \cos \theta \cdot d}{(r-1)(r+\cos 2\theta)} \quad (41)$$

и при  $\mu=\pi$  (предкрылок):

$$\delta_2 = - \frac{I}{\Gamma} \frac{\cos \theta \sin \theta \cdot d}{(r+1)(r-\cos 2\theta)}, \quad (41')$$

откуда:

$$\left| \frac{\delta_1}{\delta_2} \right| = \frac{r+1}{r-1} \frac{r - \cos 2\theta}{r + \cos 2\theta}.$$

Эта формула показывает, что изменение угла атаки для предкрылка меньше, чем для закрылка при одном и том же отношении  $\frac{I}{\Gamma}$ .

Для предкрылка отношение  $\frac{I}{\Gamma}$ , как увидим далее, порядка 0,5—0,8 и  $\rho$  заключается, обычно, в пределах 1,5—2; при этих значениях для  $|\delta_2|$  получим величины порядка 3—5°. Эти подсчеты показывают, что сделанные выше предположения о малости  $\delta$  действительно имеют место.

#### § 4. Влияние вихря на распределение скоростей на поверхности цилиндра

Рассмотрим теперь влияние добавочных вихрей на распределение скоростей на поверхности цилиндра.

Положение добавочных критических точек  $\beta$  и  $\gamma$  определяется по формулам (17):

$$\beta = \Theta + \mu - \frac{\alpha}{2} + \lambda,$$

$$\gamma = \Theta + \mu - \frac{\alpha}{2} + \pi - \lambda,$$

причем  $\lambda$  определяется по формуле (18):

$$\lambda = \arcsin \frac{r \cos(\Theta - \mu) - \cos\left(\Theta - \frac{\alpha}{2}\right) \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \mu\right)}.$$

Полагая

$$S = \frac{r \cos(\Theta - \mu) - \cos\left(\Theta - \frac{\alpha}{2}\right) \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \mu\right)}, \quad (42)$$

по формуле (18) мы видим, что  $\lambda$  принимает действительные значения только при  $S \leq 1$ . Найдем более простое выражение для  $S$ . Так как  $\alpha = \pi + 2\Theta + 2\delta$ , то, подставляя в выражение  $S$ , получим

$$S = \frac{r \cos(\Theta - \mu) - \sin \delta \sin(\Theta + \delta)}{\cos(\Theta - \mu + \delta)}.$$

Пользуясь малостью  $\delta$  и откидывая члены с  $\delta^2$ , получим:

$$\sin \delta \sin(\Theta + \delta) \approx \delta \sin \Theta;$$

$$\begin{aligned} \cos(\Theta - \mu + \delta) &= \cos(\Theta - \mu) - \sin(\Theta - \mu) \delta = \\ &= \cos(\Theta - \mu) [1 - \operatorname{tg}(\Theta - \mu) \delta]. \end{aligned}$$

Отсюда:

$$S = \frac{r \cos(\Theta - \mu) - \delta \sin \Theta}{\cos(\Theta - \mu)} [1 + \operatorname{tg}(\Theta - \mu) \delta]$$

или

$$S = r - \delta \left[ r \operatorname{tg}(\mu - \Theta) + \frac{\sin \Theta}{\cos(\Theta - \mu)} \right]. \quad (43)$$

При  $\mu = 0$ , что соответствует случаю закрылка:

$$S_1 = r + \delta \operatorname{tg} \Theta (r - 1). \quad (44)$$

При  $\mu = \pi$ , что соответствует случаю предкрылка.

$$S_2 = r + \delta \operatorname{tg} \Theta (r + 1). \quad (44')$$

Заметим, что для закрывка при обычном расположении  $\delta > 0$  и  $r > 1$  всегда; поэтому по (44) видим, что для обычного расположения закрывка  $S_1 > 1$ ; что касается предкрывка, то здесь  $\delta < 0$  и по (44')  $S_2$  может быть и меньше 1, но из физических соображений, о которых будет далее сказано, приходится считать и в этом случае всегда  $S_2 > 1$ , так что в практически важных случаях всегда  $\lambda$  величина комплексная. Найдем при этих условиях  $\beta$  и  $\gamma$ .

По известным формулам можно написать, что

$$\arcsin S = \frac{1}{i} \ln \{Si \pm \sqrt{1 - S^2}\}$$

и, замечая, что в рассматриваемом случае  $S > 1$ , имеем:

$$\lambda = \arcsin S = \frac{1}{i} \ln \{Si \pm i \sqrt{S^2 - 1}\} = \frac{\pi}{2} - i \ln \{S \pm \sqrt{S^2 - 1}\}.$$

Отсюда

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{2} - i \ln \{S + \sqrt{S^2 - 1}\}$$

$$\lambda_2 = \frac{\pi}{2} - i \ln \{S - \sqrt{S^2 - 1}\} = \frac{\pi}{2} + i \ln \{S + \sqrt{S^2 - 1}\}.$$

Полагая

$$\ln \{S + \sqrt{S^2 - 1}\} = \nu, \quad (45)$$

имеем

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{2} - i\nu; \quad \lambda_2 = \frac{\pi}{2} + i\nu.$$

и отсюда:

$$\beta = \Theta + \mu - \frac{\alpha}{2} + \lambda = \mu - \delta - i\nu; \quad (46)$$

$$\gamma = \Theta + \mu - \frac{\alpha}{2} + \pi - \lambda = \mu - \delta + i\nu. \quad (47)$$

Замена  $\lambda_1$  на  $\lambda_2$  меняет только  $\gamma$  и  $\beta$ . Если подставить найденные значения в формулу (21), то получим выражение скорости на цилиндре.

В этом случае

$$\sin \frac{\varphi - \beta}{2} \sin \frac{\varphi - \gamma}{2} = \sin \left[ \frac{\varphi - (\mu - \delta)}{2} + i \frac{\nu}{2} \right] \sin \left[ \frac{\varphi - (\mu - \delta)}{2} - i \frac{\nu}{2} \right].$$

По известной формуле:

$$\sin(A+B) \sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B,$$

а потому в рассматриваемом случае имеем:

$$\sin \frac{\varphi - \beta}{2} \sin \frac{\varphi - \gamma}{2} = \sin^2 \frac{\varphi - (\mu - \delta)}{2} - \sin^2 i \frac{\nu}{2}$$

или

$$\sin \frac{\varphi - \beta}{2} \sin \frac{\varphi - \gamma}{2} = \sin^2 \frac{\varphi - (\mu - \delta)}{2} + \text{sh}^2 \frac{\nu}{2}.$$

В этом случае формула (21) принимает следующий вид:

$$\frac{dw}{dz} = 8V_{\infty} e^{-\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)i} \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} \frac{\sin^2 \frac{\varphi - (\mu - \delta)}{2} + \text{sh}^2 \frac{\nu}{2}}{r - \cos(\varphi - \mu)}. \quad (48)$$

Обозначив

$$2 \frac{\sin^2 \frac{\varphi - (\mu - \delta)}{2} + \text{sh}^2 \frac{\nu}{2}}{r - \cos(\varphi - \mu)} = L, \quad (49)$$

можем еще написать:

$$\frac{dw}{dz} = 4V_{\infty} \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} L. \quad (50)$$

Преобразуем величину  $L$ . Заменяя

$$2 \sin^2 \frac{\varphi - (\mu - \delta)}{2} = 1 - \cos (\varphi - (\mu - \delta));$$

$$2 \operatorname{sh}^2 \frac{\nu}{2} = \frac{1}{2} \left( e^{\frac{\nu}{2}} - e^{-\frac{\nu}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} (e^{\nu} - 2 + e^{-\nu}) = \frac{1}{2} \left( e^{\nu} + \frac{1}{e^{\nu}} \right) - 1,$$

получим

$$L = \frac{\frac{1}{2} \left( e^{\nu} + \frac{1}{e^{\nu}} \right) - \cos [\varphi - (\mu - \delta)]}{\frac{1}{2} \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right) - \cos (\varphi - \mu)}. \quad (51)$$

Формула (51) чрезвычайно симметрична; возникает вопрос, какое физическое значение имеет величина  $e^{\nu}$ , входящая в (51) совершенно симметрично с  $\rho$ . Можно показать, что  $e^{\nu}$  есть расстояние от центра цилиндра до критической точки потока <sup>1)</sup>.

Из (45) имеем:

$$e^{\nu} = S + \sqrt{S^2 - 1}$$

и отсюда

$$e^{-\nu} = S - \sqrt{S^2 - 1},$$

а потому

$$\frac{1}{2} (e^{\nu} + e^{-\nu}) = S$$

и формула (51) принимает вид:

$$L = \frac{S - \cos (\varphi - (\mu - \delta))}{r - \cos (\varphi - \mu)}. \quad (52)$$

Замечая, что для закрылка ( $\mu = 0$ )  $\delta > 0$  имеем по (44), что

$$S_1 > r$$

и аналогично для предкрылка ( $\mu = \pi$ )

$$S_2 < r.$$

Возьмем  $\varphi = \mu - \frac{\delta}{2}$ ; тогда

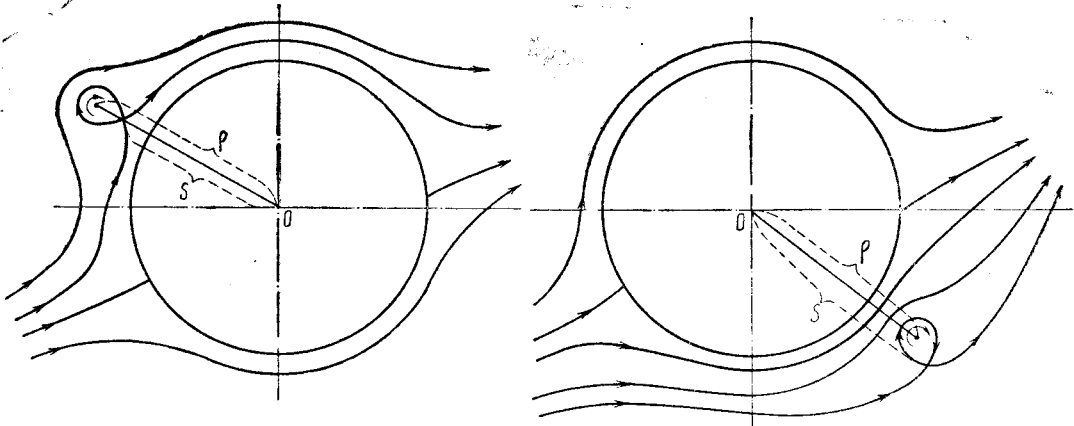
$$L = \frac{S - \cos \frac{\delta}{2}}{r - \cos \frac{\delta}{2}},$$

а потому имеем следующий результат: в случае предкрылка ( $S_2 < r$ ) в точке  $\varphi = \mu - \frac{\delta}{2}$   $L < 1$  и в случае закрылка ( $S_1 > r$ )  $L > 1$ , т. е. предкрылок уменьшает скорость на поверхности цилиндра вблизи предкрылка и закрылок увеличивает ее. Физическая картина этого совершенно ясна; она показана на фиг. 5.

Для дальнейшего решим вопрос о том промежутке на поверхности цилиндра, где предкрылок уменьшает, а закрылок увеличивает скорость.

<sup>1)</sup> См., например, В. В. Голубев. Обтекание цилиндра потоком в присутствии системы неподвижных вихрей. Учен. зап. МГУ. 1936.





Фиг. 5.

Для этого найдем точки на поверхности цилиндра, в которых  $L=1$ . Из (52) для определения  $\varphi$  имеем уравнение:

$$\cos(\varphi - (\mu - \delta)) - \cos(\varphi - \mu) = S - r$$

или

$$2 \sin \left[ \varphi - \left( \mu - \frac{\delta}{2} \right) \right] \sin \frac{\delta}{2} = r - S$$

и отсюда находим два угла:

$$\varphi_1 = \mu - \frac{\delta}{2} + \arcsin \frac{r - S}{2 \sin \frac{\delta}{2}}; \quad (53)$$

$$\varphi_2 = \mu - \frac{\delta}{2} + \pi - \arcsin \frac{r - S}{2 \sin \frac{\delta}{2}}.$$

Отсюда по (43), заменяя  $2 \sin \frac{\delta}{2} \approx \delta$ , получим:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \mu - \frac{\delta}{2} + \arcsin \left[ r \operatorname{tg}(\mu - \Theta) + \frac{\sin \Theta}{\cos(\Theta - \mu)} \right] \\ \varphi_2 &= \mu - \frac{\delta}{2} + \pi - \arcsin \left[ r \operatorname{tg}(\mu - \Theta) + \frac{\sin \Theta}{\cos(\Theta - \mu)} \right]. \end{aligned} \quad (53')$$

Рассмотрим два крайних случая:

1. Закрылок:  $\mu=0$

$$\varphi_1 = -\frac{\delta}{2} - \arcsin [\operatorname{tg} \Theta (r - 1)];$$

$$\varphi_2 = -\frac{\delta}{2} - \pi + \arcsin [\operatorname{tg} \Theta (r - 1)].$$

На фиг. 6 даны примерные положения точек, соответствующих  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . В этом случае в точке  $\varphi = -\frac{\delta}{2}$  ( $\varphi = \mu - \frac{\delta}{2}$ )  $L$  больше единицы, а потому  $L$  больше единицы на дуге  $ACB$  и, следовательно, меньше единицы на дуге  $ADB$ . Таким образом, множитель  $L$  увеличивает скорость на всей верхней поверхности цилиндра и уменьшает ее на дуге  $ADB$  нижней поверхности; и то, и другое увеличивает подъемную силу.

2. Предкрылок:  $\mu=\pi$

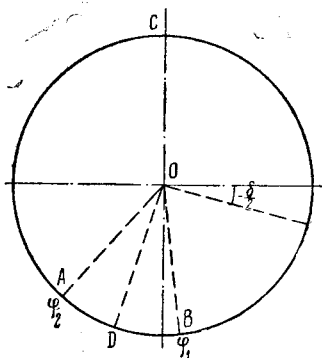
$$\varphi_1 = \pi - \frac{\delta}{2} - \arcsin [\operatorname{tg} \Theta (r + 1)];$$

$$\varphi_2 = \pi - \frac{\delta}{2} + \pi + \arcsin [\operatorname{tg} \Theta (r + 1)],$$

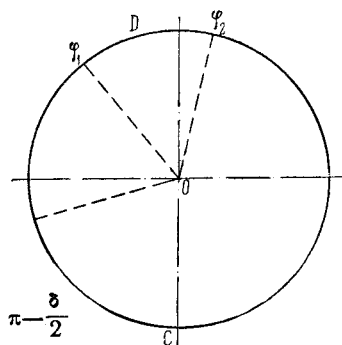
что, очевидно, можно заменить углом

$$\varphi_2' = -\frac{\delta}{2} + \arcsin [\operatorname{tg} \Theta (r + 1)].$$

На фиг. 7 даны примерные положения точек, соответствующих  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . В этом случае в точке  $\varphi = \pi - \frac{\delta}{2}$  ( $\varphi = \mu - \frac{\delta}{2}$ )  $L$  меньше единицы, а потому  $L$  меньше 1 на дуге  $ACB$  и больше единицы на дуге  $ADB$ . Таким образом, множитель  $L$  увеличивает скорость в точках около середины верхней поверхности крыла и уменьшает ее на верхней поверхности около передней и задней кромки и на всей нижней поверхности крыла. Отсюда следует, что  $L$  выравнивает скорость на дуге от  $\varphi_2$  до  $\pi$ , что способствует более плавному обтеканию в тех частях крыла, которые дают наибольшую подъемную силу; необходимо при этом заметить, что уменьшение скорости на нижней поверхности и ее увеличение в средних частях верхней поверхности крыла дает увеличение подъемной силы, но это увеличение частично компенсируется уменьшением подъемной силы, вследствие уменьшения скорости около передней и задней кромки на верхней поверхности крыла. Заметим еще, что эти выводы имеют место только в случае, если в случае закрылка  $\operatorname{tg} \Theta (r-1) < 1$  и в случае предкрылка  $\operatorname{tg} \Theta (r+1) < 1$ ; в противном случае множитель  $L$  увеличивает скорость во всех точках при закрылке и



Фиг. 6.



Фиг. 7.

уменьшает скорость во всех случаях при предкрылке. При действительных условиях, как легко видеть, приведенные выше неравенства выполняются и все приведенные выше рассуждения имеют место.

## § 5. Давление потока на цилиндр в присутствии вихря

Переходим к определению подъемной силы, действующей на цилиндр в присутствии вихря. Так как в дальнейшем вихрь заменяет действие предкрылка или закрылка, твердо связанного с крылом, то нам нужно определить силу давления потока на цилиндр, вместе с добавленным к нему вихрем. Так как в этом случае ко всей системе можно применить теорему Н. Е. Жуковского, то прежде всего нужно определить величину циркуляции вокруг всей системы, т. е. вокруг цилиндра с вихрем. Для этого достаточно взять интеграл по какой-нибудь кривой, охватывающей крыло с вихрем от выражения  $\frac{dw}{dz}$ . Применяя формулу (2), получим:

$$\int \frac{dw}{dz} dz = \Gamma + I - I = \Gamma,$$

т. е. выражается так же, как и для крыла без вихря, но величина  $\Gamma$  в этом

случае зависит от добавочных вихрей <sup>1)</sup>. Действительно, по формуле (3) имеем:

$$\Gamma = -V_{\infty} e^{-\Theta i} (1 - e^{2\Theta i}) \cdot 2\pi i - I \frac{a - \bar{a}}{(1-a)(1-\bar{a})},$$

т. е.

$$\Gamma = -4\pi V_{\infty} \sin \Theta + I \frac{d}{r - \cos \mu}. \quad (54)$$

Так как в случае предкрылка и закрылка  $I < 0$ , то еще можно написать:

$$|\Gamma| = 4\pi V_{\infty} \sin \Theta + |I| \frac{d}{r - \cos \mu}.$$

В случае цилиндра без добавочного вихря

$$\Gamma = -4\pi V_{\infty} \sin \Theta.$$

Следовательно, присутствие закрылка или предкрылка дает увеличение циркуляции и подъемной силы, равные:

$$|\Delta \Gamma| = |I| \frac{d}{r - \cos \mu}$$

и

$$|P| = \rho V_{\infty} |I| \frac{d}{r - \cos \mu}. \quad (55)$$

Рассмотрим два крайних случая:

1. Предкрылок:  $\mu = \pi$

$$|\Delta \Gamma_1| = |I| \frac{d}{r+1}.$$

2. Закрылок:  $\mu = 0$

$$|\Delta \Gamma_2| = |I| \frac{d}{r-1}.$$

Отсюда имеем при одинаковом  $|I|$ :

$$|\Delta \Gamma_1| : |\Delta \Gamma_2| = \frac{r-1}{r+1},$$

т. е. закрылок дает увеличение подъемной силы, значительно большее, чем предкрылок.

Общий вывод из всего предыдущего тот, что и предкрылок и закрылок дают увеличение подъемной силы, причем при одинаковой интенсивности добавочного вихря предкрылок дает незначительное увеличение и закрылок очень большое.

## § 6. Влияние вихря на условия обтекания круглого цилиндра

Полученные выше выводы позволяют сделать окончательные выводы о действии добавочного вихря в случае обтекания цилиндра.

По формуле (50) для скорости в точке цилиндра  $z = e^{\varphi i}$  имеем выражение:

$$\bar{V}_{\varphi} = 4V_{\infty} \left| \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\varphi - (\pi + 2\Theta + 2\delta)}{2} \right| \cdot L. \quad (56)$$

С другой стороны, при отсутствии вихря для скорости в той же точке имеем выражение:

$$V_{\varphi} = 4V_{\infty} \left| \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi - (\pi + 2\Theta)}{2} \right|. \quad (57)$$

Таким образом, действие вихря сводится, во-первых, к замене угла, определяющего положение критической точки, точки разделения потока; вместо критического угла  $\pi + 2\Theta$  при отсутствии вихря получается угол  $\pi + 2\Theta + 2\delta$ ; во-вторых, в выражении скорости (56) получается добавочный множитель  $L$ .

<sup>1)</sup> См. также: В. В. Голубев. Исследование по теории разрезного крыла. Ч. I. Труды ЦАГИ, вып. 147, 1933. Стр. 16.

Разберем подробно влияние обоих этих факторов.

Если в выражении скорости (57) заменить угол  $\pi + 2\theta$  углом  $\pi + 2\theta + 2\delta = \pi + 2(\theta + \delta)$ , то это равносильно тому, что угол атаки  $\theta$  заменяется углом  $\theta + \delta$ . Пусть при условиях обтекания, выражаемых распределением скоростей (57) цилиндр обтекается без отрыва струй до угла атаки  $\theta_0$ ; тогда при наличии распределения скоростей, даваемых формулой:

$$V_{\varphi} = 4V_{\infty} \left| \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\varphi - (\pi + 2\theta + 2\delta)}{2} \right|, \quad (58)$$

тот же цилиндр выдержит без отрыва струй обтекание до угла атаки  $\theta_1$ , причем

$$\theta_1 + \delta = \theta_0 \text{ и } \theta_1 = \theta_0 - \delta. \quad (59)$$

Следовательно, смещение критической точки влечет за собою тот важный факт, что, не меняя характера обтекания, мы можем изменить предельный угол атаки на величину  $-\delta$ . Так как для предкрылка  $\delta$  отрицательно и для закрылка положительно, то изменение положения точки разделения струй увеличивает на  $|\delta|$  предельный угол атаки при наличии предкрылка и уменьшает на  $\delta$  предельный угол атаки при наличии закрылка.

Важно отметить, что этот результат совершенно не зависит от причин, вызывающих отрыв струй и, следовательно, не зависит от структуры пограничного слоя.

Переходим к влиянию множителя  $L$ . Мы видели, что в случае предкрылка появление множителя  $L$  способствует выравниванию скоростей на большей части верхней поверхности крыла. Следовательно, благодаря множителю  $L$ , падает максимальная скорость на верхней поверхности крыла и, чтобы довести скорость до той, при которой крыло еще работает в условиях обтекания, можно еще несколько увеличить предельный угол.

Следовательно, действие предкрылка сказывается в увеличении предельного угла атаки, которое получается из двух источников: от изменения положения критической точки и проистекающего отсюда кажущегося изменения угла атаки и от выравнивания скорости в результате появления множителя  $L$ ; кроме того, получаем некоторое незначительное увеличение подъемной силы, происходящее от действия добавочного вихря, как указано в § 5.

В случае закрылка мы имеем менее ясную картину. Закрылок увеличивает скорость на всей верхней поверхности крыла, но неравномерно и здесь также получается некоторое незначительное выравнивание. Таким образом, в случае закрылка мы получаем уменьшение предельного угла атаки, происходящее от смещения критической точки и кажущегося увеличения угла атаки, которое отчасти компенсируется выравниванием, происходящим от присутствия множителя  $L$ ; кроме того, в этом случае имеем резкое увеличение подъемной силы, происходящее от действия добавочного вихря, как показано в § 5.

Для определения величины смещения критической точки у крыла, необходимо найти величину вихря  $I$ . Кроме того, необходимо учесть влияние на обтекание крыла множителя  $L$ . Эти две задачи и будут разобраны в главе II, после чего весьма легко определить изменение величины подъемной силы, даваемое наличием предкрылка или закрылка.

## Г Л А В А II

# ВЛИЯНИЕ ПРЕДКРЫЛКА И ЗАКРЫЛКА НА ИЗМЕНЕНИЕ ПОДЪЕМНОЙ СИЛЫ КРЫЛА

### § 1. Определение интенсивности добавочного вихря

Основываясь на соображениях, развитых в первой части этой работы <sup>1)</sup>, мы будем заменять в дальнейшем предкрылок или закрылок вихрем, неразрывно связанным с крылом. Для того, чтобы применить результаты предыдущей главы, необходимо определить величину циркуляции добавочного вихря, заменяющего предкрылок или закрылок. Если рассматривать предкрылок или закрылок, как плоскую пластинку, то, применяя известную формулу <sup>2)</sup>, найдем для величины циркуляции вокруг пластинки следующее выражение:

$$I = \pi V_a b \beta, \quad (10)$$

где  $V_a$  — скорость потока в точках предкрылка,  $b$  — его хорда и  $\beta$  — угол атаки относительно набегающего на предкрылок или закрылок потока.

Следовательно, для определения величины  $I$  необходимо определить величину  $V_a$  и угол  $\beta$ .

Мы ограничимся в дальнейшем случаем дужек типа инверсии параболы, как лучше всего изученных и подходящих весьма близко к случаю обычно применяемых дужек.

Если взять на плоскости  $z$  цилиндр радиуса 1, а на плоскости  $\zeta$  дужку типа инверсии параболы с центральным углом скелета  $2\alpha$  и с коэффициентом, характеризующим толщину, равным  $\varepsilon$ , то по результатам первой части <sup>3)</sup> имеем:

$$\zeta = e^{-\frac{\alpha}{2}i} (z-1) - (1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} (1-\varepsilon)^2}{(z-1) e^{-\frac{\alpha}{2}i} + (1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2}}, \quad (61)$$

при этом, как известно, радиус скелета дужки равен  $\frac{1-\varepsilon}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ .

Из (61) имеем:

$$\frac{d\zeta}{dz} = e^{-\frac{\alpha}{2}i} \left( 1 - \frac{(1-\varepsilon)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\left[ (z-1) e^{-\frac{\alpha}{2}i} + (1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} \right]^2} \right) \quad (62)$$

<sup>1)</sup> В. В. Голубев. Исследования по теории разрезного крыла. Ч. 1. Стр. 11—12. Труды ЦАГИ, вып. 147. 1933.

<sup>2)</sup> Ibid. Стр. 11—12.

<sup>3)</sup> Ibid. Стр. 11—12.

и при  $z=\infty$

$$\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_{z=\infty} = e^{-\frac{\alpha}{2}i}.$$

Назовем через  $V$  скорость в бесконечности на плоскости  $\zeta$  и через  $\lambda$  угол, образованный  $V$  с действительной осью плоскости  $\zeta$ , тогда из равенства:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz}$$

при  $z=\infty$  получим следующее соотношение между скоростями в бесконечности на плоскости  $\zeta$  и  $z$ :

$$V_{\infty} e^{-\theta i} = V e^{-\lambda i - \frac{\alpha}{2} i},$$

откуда

$$V_{\infty} = V; \quad \theta = \lambda + \frac{\alpha}{2}. \quad (63)$$

Полагая с другой стороны  $z=e^{\varphi i}$ , получим скорость  $V_{\zeta}$  на поверхности крыла:

$$V_{\zeta} = V_{\varphi} : \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|,$$

где  $V_{\varphi}$  — скорость в точке, лежащей на поверхности цилиндра. Подставляя.

$$\left| \frac{d\zeta}{dz} \right| = \left| e^{-\frac{\alpha}{2} i (z-1)} \frac{\left[ (z-1) e^{-\frac{\alpha}{2} i} + 2(1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} \right]}{\left[ (z-1) e^{-\frac{\alpha}{2} i} + (1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} \right]^2} \right|,$$

получим окончательно: <sup>1)</sup>

$$V_{\zeta} = V_{\infty} \frac{\sin \frac{\varphi - \alpha_1}{2}}{2} \times L \frac{(1-\varepsilon)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 4(1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} + 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{(1-\varepsilon)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2(1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} + \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}, \quad (64)$$

где  $\alpha_1 = \pi + 2\theta + 2\delta$ . Если сравнить полученное выражение с выражением для скорости без добавочного вихря, то увидим, что присутствие добавочного вихря влечет за собой появление в (64) множителя  $L$  и угла  $2\delta$ . Без добавочного вихря  $L=1$  и  $\delta=0$ .

В дальнейшем мы будем пренебрегать изогнутостью крыла, т. е. положим  $\alpha=0$ ; тогда

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{(z-1)[z+1-2\varepsilon]}{(z-\varepsilon)^2}.$$

Подставляя это значение и взяв  $\frac{dw}{dz}$  из (2) гл. I, получим:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} = & \left\{ V_{\infty} e^{-\theta i} \left( 1 - \frac{e^{2\theta i}}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} + \right. \\ & \left. + \frac{I}{2\pi i} \left( \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-\bar{a}} \right) \right\} \frac{(z-\varepsilon)^2}{(z-1)(z+1-2\varepsilon)} \end{aligned} \quad (65)$$

<sup>1)</sup> Вычисления см. Исследования по теории разрезного крыла. Ч. 1. Стр. 30–31.

Формула (65) позволяет определить скорость в любой точке течения на плоскости  $\zeta$ ; полагая  $z=a$ , получим искомую скорость на оси добавочного вихря, если предварительно вычтем в первом множителе член  $\frac{I}{2\pi i} \frac{1}{z-a}$ , так как вихрь сам себе не создает скорости. Называя эту скорость через  $V_a$ , имеем:

$$V_a = \left| V_\infty e^{-\theta i} \left( 1 - \frac{e^{2\theta i}}{a^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{a} - \frac{I}{2\pi i} \frac{1}{a-a} \right| \cdot \frac{|a-\varepsilon|^2}{|a-1| |a+1-2\varepsilon|}. \quad (66)$$

Так как  $a = \rho e^{i\mu}$ , то:

$$\begin{aligned} |a-\varepsilon|^2 &= |\rho \cos \mu - \varepsilon + i\rho \sin \mu|^2 = \rho^2 - 2\rho\varepsilon \cos \mu + \varepsilon^2 \\ |a-1| &= |\rho \cos \mu - 1 + i\rho \sin \mu| = \sqrt{\rho^2 - 2\rho \cos \mu + 1} \\ |a+1-2\varepsilon| &= \sqrt{\rho^2 + 2\rho(1-2\varepsilon) \cos \mu + (1-2\varepsilon)^2} \\ \left| V_\infty e^{-\theta i} \left( 1 - \frac{e^{2\theta i}}{a^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{a} - \frac{I}{2\pi i} \frac{1}{a-a} \right| &= \left| V_\infty e^{-\theta i} \left( 1 - \frac{1}{\rho^2} e^{2(\theta-\mu)i} \right) + \right. \\ &+ \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{\rho} e^{-\mu i} - \frac{I}{2\pi i} \frac{e^{-\mu i}}{\rho - \frac{1}{\rho}} \left. \right| = \left| iV_\infty e^{-(\theta-\mu)i} \left( 1 - \frac{1}{\rho^2} e^{2(\theta-\mu)i} \right) + \right. \\ &+ \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{\rho} - \frac{I}{2\pi} \frac{1}{\rho - \frac{1}{\rho}} \left. \right| = \left| iV_\infty \cos(\theta-\mu) - i \frac{1}{\rho^2} \cos(\theta-\mu) + \right. \\ &+ V_\infty \sin(\theta-\mu) + \frac{1}{\rho^2} V_\infty \sin(\theta-\mu) + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{\rho} - \frac{I}{2\pi} \frac{1}{\rho - \frac{1}{\rho}} \left. \right| = \\ &= \sqrt{\left\{ V_\infty \left( 1 + \frac{1}{\rho^2} \right) \sin(\theta-\mu) + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{\rho} - \frac{I}{2\pi} \frac{1}{\rho - \frac{1}{\rho}} \right\}^2 + V_\infty^2 \left( 1 - \frac{1}{\rho^2} \right)^2 \cos^2(\theta-\mu)}. \quad (67) \end{aligned}$$

Заменяя в (66)  $V_a$  через  $I$  из (60), подставляя найденные значения, получим после возведения в квадрат

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma^2}{\pi^2 b^2 \rho^2} &= V_\infty^2 \left\{ 1 - \frac{2}{\rho^2} \cos 2(\theta-\mu) + \frac{1}{\rho^4} + 2 \sin(\theta-\mu) \left( 1 + \frac{1}{\rho^2} \right) \cdot \left[ \frac{\Gamma}{2\pi V_\infty} \frac{1}{\rho} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{I}{2\pi V_\infty} \frac{1}{\rho - \frac{1}{\rho}} \right] + \left[ \frac{\Gamma}{2\pi V_\infty} \frac{1}{\rho} - \frac{I}{2\pi V_\infty} \frac{1}{\rho - \frac{1}{\rho}} \right]^2 \right\} \times \\ &\times \frac{[\rho^2 - 2\varepsilon \rho \cos \mu + \varepsilon^2]^2}{(\rho^2 - 2\rho \cos \mu + 1)(\rho^2 + 2(1-2\varepsilon)\rho \cos \mu + (1-2\varepsilon)^2)}. \quad (68) \end{aligned}$$

Если в (68) подставить значение  $\Gamma$  из (54) гл. I, то получим для  $I$  квадратное уравнение, из которого и можно определить циркуляцию  $I$ . Можно показать, что корни уравнения (68) имеют разные знаки и по характеру задачи ясно, что надо взять решение  $I$  отрицательное.

Хотя числовое решение этого уравнения и не представляет затруднений, но общий вид решения очень сложен, сложно и его исследование.

Можно значительно упростить вычисления, исходя из следующих соображений. Положим

$$\frac{I}{2\pi b\beta V_{\infty}} = X.$$

Уравнение (68) после введения неизвестного  $X$  принимает окончательно вид:

$$X^2 \cdot 4 \frac{(\rho^2 - 2\rho \cos \mu + 1)(\rho^2 + 2(1 - 2\varepsilon)\rho \cos \mu + (1 - 2\varepsilon)^2)}{[\rho^2 - 2\varepsilon\rho \cos \mu + \varepsilon^2]^2} = 1 - \frac{2}{\rho^2} \cos 2(\Theta - \mu) + \\ + \frac{1}{\rho^4} + 2 \sin(\Theta - \mu) \left[ -\frac{2 \sin \Theta}{\rho} + Xb\beta \left\{ \frac{d}{\rho} \left( 1 + \frac{1}{\rho^2} \right) \frac{1}{r - \cos \mu} - \frac{1}{2d} \right\} \right] + \left[ -\frac{2 \sin \Theta}{\rho} + \right. \\ \left. + Xb\beta \left\{ \frac{d}{\rho} \frac{1}{r - \cos \mu} - \frac{1}{2d} \right\} \right].$$

Члены, содержащие множителем  $b\beta$  малы, так как  $b$ —хорда предкрылка не превосходит 0,2 хорды основной части, которая имеет величину при радиусе первоначального круга, равного единице, около 4 (4—хорда прямой пластинки, в которую переходит при отображении окружность). Таким образом,  $b < 0,8$ . Угол атаки предкрылка порядка  $15-20^\circ$ , поэтому  $\beta < 0,3$ , а потому  $b\beta < 0,25$  и величины в скобках порядка  $\frac{1}{2}$ . В общем откидывание этих членов дает ошибку порядка 5%. Откидывание членов, содержащих  $X$  в первой степени, равносильно тому, что мы пренебрегаем действием вихря, симметричного с вихрем, заменяющим предкрылок или закрылок. Такое упрощение в аналогичном случае было сделано Н. Е. Жуковским<sup>1)</sup>.

Пользуясь таким упрощением, получим для  $I$  следующее значение:

$$I = -\pi b\beta V_{\infty} \sqrt{1 - \frac{2}{\rho^2} \cos 2(\mu - \Theta) + \frac{1}{\rho^4} + 4 \sin(\mu - \Theta) \sin \Theta \frac{1}{\rho} \left( 1 + \frac{1}{\rho^2} \right) + \frac{4 \sin^2 \Theta}{\rho^2}} \times \\ \times \frac{\rho^2 - 2\rho \varepsilon \cos(\mu + \varepsilon^2)}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho \cos \mu + 1} \sqrt{\rho^2 + 2(1 - 2\varepsilon)\rho \cos \mu + (1 - 2\varepsilon)^2}}. \quad (69)$$

Формула (69) позволяет по конструктивным данным определить интенсивность добавочного вихря.

Рассмотрим два частных крайних случая, соответствующих предкрылку и закрылку.

1.  $\mu = 0$ ; закрылок.

В этом случае:

$$1 - \frac{2}{\rho^2} \cos 2(\mu - \Theta) + \frac{1}{\rho^4} + 4 \sin(\mu - \Theta) \sin \Theta \frac{1}{\rho} \left( 1 + \frac{1}{\rho^2} \right) + \frac{4 \sin^2 \Theta}{\rho^2} = \\ = \left( 1 - \frac{1}{\rho} \right)^2 \left[ 1 + \frac{2 \cos 2\Theta}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \right]$$

и подставляя в (69), получим:

$$I = -\pi b\beta V_{\infty} \sqrt{1 + \frac{2 \cos 2\Theta}{\rho} + \frac{1}{\rho^2}} \frac{(\rho - \varepsilon)^2}{\rho(\rho + 1 - 2\varepsilon)}. \quad (70)$$

2.  $\mu = \pi$ ; предкрылок.

В этом случае:

$$1 - \frac{2}{\rho^2} \cos 2(\mu - \Theta) + \frac{1}{\rho^4} + 4 \sin(\mu - \Theta) \sin \Theta \frac{1}{\rho} \left( 1 + \frac{1}{\rho^2} \right) + \frac{4 \sin^2 \Theta}{\rho^2} = \\ = \left( 1 + \frac{1}{\rho} \right)^2 \left[ 1 - \frac{2 \cos 2\Theta}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \right]$$

<sup>1)</sup> Н. Е. Жуковский. О поддерживающих планах типа Антуанет. Труды (Сб. Физ. наук О. Л. Е. Том XV, вып. 2, 1911.

и для  $I$  получаем выражение:

$$I = -\pi b \beta V_{\infty} \sqrt{1 - \frac{2 \cos 2\theta}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{(\rho + \varepsilon)^2}{(\rho - 1 + 2\varepsilon)}} \quad (71)$$

## § 2. Теория работы предкрылка

Выведенные формулы позволяют изучить влияние предкрылка на подъемную силу крыла. Как видно из предыдущего, действие предкрылка сводится к следующему:

1) Изменяются условия обтекания, благодаря чему увеличивается предельный угол атаки; это увеличение является следствием двух следующих факторов:

а) благодаря изменению распределения скоростей получается смещение критической точки разделения струй, соответствующее уменьшению угла атаки на величину  $\delta$ ;

б) благодаря выравниванию скоростей на верхней поверхности крыла, вызываемому появлением множителя  $L$ .

2) Благодаря изменению величины циркуляции получается увеличение подъемной силы крыла.

Мы исследуем теперь влияние каждого фактора в отдельности. Скорость в точке крыла при наличии предкрылка  $V_{\zeta}$  и соответствующая скорость без предкрылка  $V_{\xi}^0$  выражаются следующими формулами:

$$V_{\zeta} = V_{\infty} \sin \frac{\varphi - (\pi + 2\theta + 2\delta)}{2} \times \\ \times L \sqrt{\frac{(1 - \varepsilon)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 4(1 - \varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} + 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{(1 - \varepsilon)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2(1 - \varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} + \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}, \quad (71')$$

$$V_{\xi}^0 = V_{\infty} \sin \frac{\varphi - (\pi + 2\theta_0)}{2} \times \\ \times \sqrt{\frac{(1 - \varepsilon)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 4(1 - \varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} + 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{(1 - \varepsilon)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2(1 - \varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} + \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}. \quad (72)$$

Сравнивая (71') и (72), мы видим, что

$$V_{\zeta} = V_{\xi}^0 \frac{\sin \frac{\varphi - (\pi + 2\theta + 2\delta)}{2}}{\sin \frac{\varphi - (\pi + 2\theta_0)}{2}} \cdot L. \quad (73)$$

Таким образом, влияние предкрылка на распределение скоростей сказывается в появлении угла  $\delta$  и множителя  $L$ . В области передней кромки, где образование больших скоростей и вызывает отрыв струй,  $L < 1$  и так

как  $\delta$  отрицательно, то при  $\theta = \theta_0$  дробь  $\frac{\sin \frac{\varphi - (\pi + 2\theta + 2\delta)}{2}}{\sin \frac{\varphi - (\pi + 2\theta_0)}{2}} < 1$ ; поэтому в

области передней кромки  $V_{\zeta} < V_{\xi}^0$ . Так как  $L$  выравнивает скорости на верхней поверхности крыла, то можно без опасности образования отрыва струй увеличить  $\theta$  таким образом, чтобы  $V_{\zeta}$  равнялось  $V_{\xi}^0$ , вычисленному при  $\theta_0$ , равном предельному углу атаки крыла без предкрылка.

Подберем угол  $\Theta$  таким образом, чтобы

$$\sin \frac{\varphi - (\pi + 2\Theta + 2\delta)}{2} = \sin \frac{\varphi - (\pi + 2\Theta_0)}{2};$$

отсюда

$$\Theta = \Theta_0 - \delta. \quad (73')$$

Итак, замечая, что  $V_\zeta$  зависит от  $\Theta$  и  $V_\zeta^0$  от  $\Theta_0$ , при этом условии можем написать:

$$V_\zeta (\Theta_0 - \delta) = V_\zeta^0 (\Theta_0) \cdot L. \quad (74)$$

Так как  $L < 1$  в области передней кромки, то там  $V_\zeta (\Theta_0 - \delta) < V_\zeta^0 (\Theta_0)$ . Не опасаясь образования отрыва струй, мы можем увеличить  $\Theta_0$  таким образом, чтобы

$$V_\zeta (\Theta_0 + \Delta\Theta - \delta) = V_\zeta^0 (\Theta_0). \quad (75)$$

При изменении  $\Theta_0$  меняются и  $V_\zeta^0 (\Theta_0)$  и  $L$ ; найдем их изменения.

Из уравнения (2) гл. I при  $I=0$ , т. е. без предкрылка, имеем при  $z=e^{\varphi i}$ :

$$\frac{dw}{dz} = V_\infty e^{-\Theta i} (1 - e^{2(\Theta - \varphi)i}) + \frac{\Gamma}{2\pi i} e^{-\varphi i},$$

откуда

$$V_\zeta^0 (\Theta_0) = \left| \frac{dw}{dz} \right| = \left| 2V_\infty \sin (\Theta_0 - \varphi) + \frac{\Gamma}{2\pi} \right|$$

и заменяя  $\Gamma$  из (54) (при  $I=0$ ), имеем:

$$V_\zeta^0 (\Theta_0) = 2V_\infty (\sin (\varphi - \Theta_0) + \sin \Theta_0). \quad (76)$$

Отсюда, между прочим, можно получить максимальную скорость в точке цилиндра при наличии циркуляции вокруг цилиндра, полагая  $\varphi - \Theta = \frac{\pi}{2}$ , тогда

$$V_\zeta^0 (\Theta_0)_{\max} = 2V_\infty (1 + \sin \Theta_0),$$

откуда при  $\Theta=0$  получим известную формулу для максимальной скорости обтекания цилиндра без циркуляции; она равна  $2V_\infty$ .

Из формулы (76) имеем:

$$\Delta V_\zeta^0 = 2V_\infty [-\cos (\varphi - \Theta_0) + \cos \Theta_0] \Delta\Theta = 4V_\infty \sin \frac{\varphi}{2} \sin \left( \frac{\varphi}{2} - \Theta_0 \right). \quad (77)$$

Так как по (76)

$$V_\zeta^0 (\Theta_0) = 4V_\infty \sin \frac{\varphi}{2} \cos \left( \frac{\varphi}{4} - \Theta_0 \right) \quad (78)$$

и из (77) и (78) имеем:

$$\frac{\Delta V_\zeta^0}{V_\zeta^0 (\Theta_0)} = \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} - \Theta_0 \right) \Delta\Theta. \quad (79)$$

Окончательно имеем:

$$V_\zeta^0 (\Theta_0 + \Delta\Theta) = V_\zeta^0 (\Theta_0) + \Delta V_\zeta^0 = V_\zeta^0 (\Theta_0) \left[ 1 + \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} - \Theta_0 \right) \Delta\Theta \right]. \quad (80)$$

С другой стороны по (52)

$$L = \frac{S - \cos (\varphi - (\mu - \delta))}{r - \cos (\varphi - \mu)} = 1 - \frac{r - S - \cos (\varphi - \mu) + \cos (\varphi - (\mu - \delta))}{r - \cos (\varphi - \mu)}$$

или, полагая  $L = 1 - \Delta L$ , имеем:

$$\Delta L = \frac{r - S - \cos (\varphi - \mu) + \cos (\varphi - (\mu - \delta))}{r - \cos (\varphi - \mu)}.$$

Так как по (43):

$$r - S = \delta \left[ r \operatorname{tg} (\mu - \Theta) + \frac{\sin \Theta}{\cos (\Theta - \mu)} \right]$$

и

$$\cos (\varphi - (\mu - \delta)) - \cos (\varphi - \mu) = -2 \sin \left( \varphi - \mu + \frac{\delta}{2} \right) \sin \frac{\delta}{2},$$

то

$$\Delta L = \frac{\delta \left[ r \operatorname{tg} (\mu - \Theta) + \frac{\sin \Theta}{\cos (\Theta - \mu)} - 2 \sin \left( \varphi - \mu + \frac{\delta}{2} \right) \sin \frac{\delta}{2} \right]}{r - \cos (\varphi - \mu)}.$$

Можно придать этому выражению более симметричный вид. Для этого заметим, что по (53') имеем:

$$r \operatorname{tg} (\mu - \Theta) + \frac{\sin \Theta}{\cos (\Theta - \mu)} = \sin \left[ \varphi_1 - \left( \mu - \frac{\delta}{2} \right) \right].$$

Отсюда, заменяя  $2 \sin \frac{\delta}{2}$  через  $\delta$ :

$$\Delta L = \delta \frac{\sin \left( \varphi_1 - \left( \mu - \frac{\delta}{2} \right) \right) - \sin \left( \varphi - \left( \mu - \frac{\delta}{2} \right) \right)}{r - \cos (\varphi - \mu)} \quad (81)$$

или

$$\Delta L = -2\delta \frac{\sin \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi + \varphi_1 - 2\mu + \delta}{2}}{r - \cos (\varphi - \mu)}.$$

Но из (53') имеем:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 2\mu - \delta + \pi$$

и

$$\varphi_1 - 2\mu + \delta = \pi - \varphi_2.$$

Следовательно

$$\Delta L = -2\delta \frac{\sin \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \cos \frac{\pi + (\varphi - \varphi_2)}{2}}{r - \cos (\varphi - \mu)}$$

или в следующем весьма симметричном виде:

$$\Delta L = -2\delta \frac{\sin \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2 - \varphi}{2}}{r - \cos (\varphi - \mu)}. \quad (82)$$

Подставляя все это в уравнение (75), имеем, заменяя

$$V_{\zeta} (\Theta_0 - \delta) = V_{\zeta}^{\circ} (\Theta_0) L:$$

$$V_{\zeta}^{\circ} (\Theta_0) \left[ 1 + \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} - \Theta_0 \right) \Delta \Theta \right] [1 - \Delta L] = V_{\zeta}^{\circ} (\Theta_0),$$

отсюда, ограничиваясь первыми степенями малых величин  $\Delta \Theta$  и  $\Delta L$ , имеем:

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} - \Theta_0 \right) \Delta \Theta - \Delta L = 0 \quad (83)$$

и допустимый прирост угла определится формулой:

$$\Delta \Theta = \frac{\Delta L}{\operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} - \Theta_0 \right)} = 2\delta \frac{\sin \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi - \varphi_2}{2}}{[r - \cos (\varphi - \mu)] \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} - \Theta_0 \right)}. \quad (84)$$

Уравнение (75) должно выполняться в области передней кромки. Если поместить предкрылок в точке, где скорость максимальная, то нужно

требовать выполнения равенства (84) в точке  $\varphi = \mu$ . Тогда равенство (84) примет вид:

$$\Delta\theta = 2\delta \frac{\sin \frac{\mu - \varphi_1}{2} \sin \frac{\mu - \varphi_2}{2}}{(r-1) \operatorname{tg} \left( \frac{\mu}{2} - \theta_0 \right)}, \quad (85)$$

но

$$\varphi_1 = \mu - \frac{\delta}{2} + \arcsin \left[ r \operatorname{tg} (\mu - \theta) + \frac{\sin \theta}{\cos (\theta - \mu)} \right] = \mu - \frac{\delta}{2} + \arcsin \frac{r-S}{\delta}$$

$$\varphi_2 = \mu - \frac{\delta}{2} + \pi - \arcsin \frac{r-S}{\delta}.$$

Подставляя в (85), получим:

$$\Delta\theta = 2\delta \frac{\sin \left[ \frac{\arcsin \frac{r-S}{\delta}}{2} - \frac{\delta}{4} \right] \sin \left[ \frac{\pi}{2} - \left( \frac{\arcsin \frac{r-S}{\delta}}{2} - \frac{\delta}{4} \right) \right]}{(r-1) \operatorname{tg} \left( \frac{\mu}{2} - \theta \right)}.$$

Ограничиваясь членами первого порядка относительно  $\delta$ , можем написать:

$$\Delta\theta = \delta \frac{2 \sin \frac{\arcsin \frac{r-S}{\delta}}{2} \cos \frac{\arcsin \frac{r-S}{\delta}}{2}}{(r-1) \operatorname{tg} \left( \frac{\mu}{2} - \theta \right)}$$

или

$$\Delta\theta = \frac{r-S}{(r-1) \operatorname{tg} \left( \frac{\mu}{2} - \theta \right)}. \quad (86)$$

Возвращаясь к формуле (73'), имеем для предельного угла атаки выражение

$$\theta = \theta_0 + \Delta\theta - \delta$$

и полное увеличение предельного угла атаки от действия предкрылка выражается величиной

$$\Delta_1\theta = \Delta\theta - \delta,$$

или, так как  $\delta$  отрицательно в случае предкрылка,

$$\Delta_1\theta = \Delta\theta + |\delta|. \quad (87)$$

Так как в рассматриваемом случае  $\mu$  близко к  $\pi$ , то мы положим в предшествующих формулах  $\mu = \pi$ . Тогда по (44')

$$r-S = -\delta \operatorname{tg} \theta_0 (r+1)$$

и

$$\Delta_1\theta = -\delta - \delta \operatorname{tg}^2 \theta_0 \frac{r+1}{r-1} = |\delta| \frac{r - \cos 2\theta_0}{\cos^2 \theta_0 (r-1)}. \quad (88)$$

Чтобы получить окончательную формулу, определяющую  $\Delta_1\theta$  через угол атаки и через конструкцию крыла, надо определить  $\delta$ .

Из (39')

$$\delta = -\frac{K \cos \theta_0}{r - \cos 2\theta_0}$$

и по (7) и (5)

$$K = \frac{A}{2V_\infty} = -\frac{I \cdot d}{4\pi V_\infty (r - \cos \mu)},$$

так что

$$\delta = \frac{I \cdot d \cdot \cos \theta_0}{4\pi V_\infty (r+1) (r - \cos 2\theta_0)}.$$

Но по (71)

$$I = -\pi b \beta V_{\infty} \sqrt{\rho^2 - 2\rho \cos 2\theta + 1} \frac{(\rho + \varepsilon)^2}{\rho^2 (\rho - 1 + 2\varepsilon)}$$

и, наконец, подставляя все эти значения в (88), получим:

$$\Delta_1 \theta = \frac{b \beta \sqrt{\rho^2 - 2\rho \cos 2\theta + 1} (\rho + \varepsilon)^2 (\rho^2 - 1)}{8\rho^3 (r + 1) (r - 1) (\rho - 1 + 2\varepsilon) \cos \theta_0}$$

и

$$r + 1 = \frac{1}{2} \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right) + 1 = \frac{(\rho + 1)^2}{2\rho}; \quad r - 1 = \frac{(\rho - 1)^2}{2\rho};$$

поэтому окончательно имеем:

$$\Delta_1 \theta = \frac{b \beta \sqrt{\rho^2 - 2\rho \cos 2\theta + 1} (\rho + \varepsilon)^2}{2\rho (\rho^2 - 1) (\rho - 1 + 2\varepsilon) \cos \theta_0}. \quad (89)$$

Это и есть окончательная формула, дающая величину приращения предельного угла атаки, под действием предкрылка.

Эта формула весьма мало отличается от формулы, выведенной на стр. 59 первой части работы, которая имеет следующий вид:

$$\Delta \theta = \frac{b \beta \sqrt{\rho^2 - 2\rho \cos 2\theta + 1} (\rho + \varepsilon)^2 \cos \theta_0}{2\rho (\rho^2 - 1) (\rho - 1 + 2\varepsilon)}.$$

Следовательно, найденная величина  $\Delta_1 \theta$  больше  $\Delta \theta$  первой части в  $\frac{1}{\cos^2 \theta_0}$  раз.

Переходим к определению изменения величины подъемной силы. По формуле (54):

$$\Gamma(\theta) = -4\pi V_{\infty} \sin \theta + I(\theta) \frac{d}{r - \cos \mu}.$$

Поэтому циркуляция для угла  $\theta_0 + \Delta_1 \theta$  определится формулой:

$$\Gamma(\theta_0 + \Delta_1 \theta) = -4\pi V_{\infty} \sin(\theta_0 + \Delta_1 \theta) + I(\theta_0 + \Delta_1 \theta) \frac{d}{r + 1}.$$

С другой стороны, циркуляция при отсутствии предкрылка при предельном угле атаки  $\theta_0$  есть:

$$\Gamma_0(\theta_0) = -4\pi V_{\infty} \sin \theta_0.$$

Отсюда приращение циркуляции при действии предкрылка и при предельном угле атаки определится формулой:

$$\Delta \Gamma = \Gamma(\theta_0 + \Delta_1 \theta) - \Gamma_0(\theta_0) = -4\pi V_{\infty} \cdot 2 \sin \frac{\Delta_1 \theta}{2} \cos \left( \theta_0 + \frac{\Delta_1 \theta}{2} \right) + I(\theta_0 + \Delta_1 \theta) \frac{d}{r + 1}.$$

Заменяя здесь  $2 \sin \frac{\Delta_1 \theta}{2} = \Delta_1 \theta$  и помня, что  $I < 0$ , можем написать:

$$|\Delta \Gamma| = 4\pi V_{\infty} \Delta_1 \theta \cos \left( \theta_0 + \frac{\Delta_1 \theta}{2} \right) + |I(\theta_0 + \Delta_1 \theta)| \frac{d}{r + 1}; \quad (90)$$

подставляя сюда  $\Delta_1 \theta$  из (89) и  $I(\theta_0 + \Delta_1 \theta)$  из (71), найдем максимальное увеличение подъемной силы, которое может быть достигнуто при помощи предкрылка при предельном угле атаки, по формуле Н. Е. Жуковского:

$$\Delta P_1 = \varepsilon V_{\infty} |\Delta \Gamma_1|. \quad (91)$$

Формуле (91) можно дать весьма простой вид, выразив  $\Delta_1 P$  через  $\Delta_1 \theta$ . Для этого из (39'), (7) и (5) выразим  $I$  через  $\delta$ ; получим:

$$I = 4\pi V_{\infty} \delta \frac{(r + 1)(r - \cos 2\theta)}{d \cos \theta}.$$

Заменяя здесь  $\delta$  через  $\Delta_1\theta$  по формуле (88), получим:

$$|I|=4\pi V_\infty \Delta_1\theta \cos \theta_0 \frac{(r+1)(r-1)}{d}.$$

Подставляя найденное выражение в (90), получим:

$$|\Delta\Gamma|=4\pi V_\infty \Delta_1\theta \left[ \cos \left( \theta_0 + \frac{\Delta_1\theta}{2} \right) + \cos (\theta_0 + \Delta_1\theta) (r-1) \right]. \quad (90')$$

Если в (90') заменить приближенно  $\cos \left( \theta_0 + \frac{\Delta_1\theta}{2} \right)$  и  $\cos (\theta_0 + \Delta_1\theta)$  через  $\cos \theta_0$ , то формула (91) примет следующий весьма простой вид:

$$\Delta_1 P = 4\pi\sigma V_\infty^2 \Delta_1\theta \cos \theta_0 r = 4\pi\sigma V_\infty^2 \Delta_1\theta \cos \theta_0 \frac{\rho^2+1}{2\rho}. \quad (90'')$$

Так как подъемная сила крыла без предкрылка при предельном угле атаки равна:

$$P = \sigma V_\infty |\Gamma_0(\theta_0)| = 4\pi\sigma V_\infty^2 \sin \theta_0,$$

то окончательно имеем следующую весьма удобную для вычислений формулу:

$$\frac{\Delta_1 P}{P} = \operatorname{ctg} \theta_0 \frac{\rho^2+1}{2\rho} \Delta_2\theta. \quad (90''')$$

Представляет значительный интерес определение величины силы, действующей на предкрылок; естественно, что точное решение этого вопроса невозможно методом, который здесь применяется. Некоторое приближение можно получить, рассчитав величину силы, действующей на заменяющий предкрылок вихрь. По теореме Н. Е. Жуковского эта сила выражается формулой:

$$P_1 = \rho V_a \cdot I = \pi\rho b\beta V_a^2 = \frac{\rho I^2}{\pi b\beta}.$$

Полагая, что  $\mu = \pi$ , получим по (71)

$$P_1 = \pi\rho V_\infty^2 b\beta \left( 1 - \frac{2 \cos 2\theta}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \right) \frac{(\rho+\varepsilon)^4}{\rho^2 (\rho-1+2\varepsilon)^2}.$$

Для очень тонких крыльев, полагая  $\varepsilon=0$ , имеем:

$$P_1 = \pi\rho V_\infty^2 b\beta \frac{\rho^2 - 2\rho \cos 2\theta + 1}{\rho^2 - 2\rho + 1} > \pi\rho V_\infty^2 b\beta.$$

### § 3. Теория работы закрылка

Теория работы закрылка во многом совершенно похожа на изложенную выше теорию работы предкрылка. Формулы (71), (72) и (73) остаются здесь без всякого изменения, но для закрылка  $\delta$  положительно и  $L$  иначе влияет на условия обтекания.

Повторяя предшествующие рассуждения, определим в формуле:

$$V_\zeta = V^\circ \frac{\sin \frac{\varphi - (\pi + 2\theta + 2\epsilon)}{2}}{\sin \frac{\varphi - (\pi + 2\theta_0)}{2}} \cdot L \quad (73)$$

$\theta$  таким образом, чтобы  $\sin \frac{\varphi - (\pi + 2\theta + 2\epsilon)}{2} = \sin \frac{\varphi - (\pi + 2\theta_0)}{2}$ , для чего надо положить

$$\theta = \theta_0 - \delta. \quad (92)$$

Отсюда (73) принимает вид:

$$V_\zeta(\theta_0 - \delta) = V^\circ_\zeta(\theta_0) \cdot L. \quad (93)$$

Так как  $L > 1$  для закрылка в области передней кромки, то в области передней кромки  $V_{\zeta}(\theta_0 - \delta) > V_{\zeta}^{\circ}(\theta_0)$ . Чтобы не было отрыва струй, мы уменьшим  $\theta_0$  таким образом, чтобы

$$V_{\zeta}(\theta_0 - \Delta\theta - \delta) = V_{\zeta}^{\circ}(\theta_0). \quad (94)$$

При этом получим по (80):

$$V_{\zeta}^{\circ}(\theta_0 - \Delta\theta) = V_{\zeta}^{\circ}(\theta_0) \left[ 1 - \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} - \theta_0 \right) \Delta\theta \right] \quad (95)$$

и полагая здесь

$$L = 1 + \Delta L.$$

Тогда по (93) можем написать:

$$V_{\zeta}(\theta_0 - \Delta\theta - \delta) = V_{\zeta}^{\circ}(\theta_0) \left[ 1 - \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} - \theta_0 \right) \Delta\theta \right] [1 + \Delta L] \quad (96)$$

или, заменяя левую половину под (94) через  $V_{\zeta}^{\circ}(\theta_0)$  и ограничиваясь первыми степенями малых величин  $\Delta\theta$  и  $\Delta L$ :

$$\Delta L - \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} - \theta_0 \right) \Delta\theta = 0,$$

откуда

$$\Delta\theta = \frac{\Delta L}{\operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} - \theta_0 \right)}. \quad (97)$$

Пусть наибольшая скорость получается в точке  $\varphi = \nu$ , причем  $\nu$  близко к  $\pi$ . Тогда мы потребуем, чтобы уравнение (97) выполнялось при  $\varphi = \nu$ . Заменяя  $\Delta L$  из (82), причем необходимо переменить знак, получим:

$$\Delta L = 2\delta \frac{\sin \frac{\nu - \varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2 - \nu}{2}}{r - \cos(\nu - \mu)}$$

и

$$\Delta\theta = 2\delta \frac{\sin \frac{\nu - \varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2 - \nu}{2}}{[r - \cos(\nu - \mu)] \operatorname{tg} \left( \frac{\nu}{2} - \theta_0 \right)}.$$

Делая здесь те же преобразования, что и в предыдущем параграфе, и замечая, что в настоящем случае  $\Delta L$  имеет обратный знак и, полагая  $\mu = 0$  и  $\nu = \pi$ , получим аналогично (86):

$$\Delta\theta = \frac{S - r}{(r + 1) \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \theta_0 \right)}. \quad (98)$$

Возвращаясь к формуле (97), получим для уменьшения предельного угла атаки следующее выражение:

$$\Delta_2\theta = \Delta\theta + \delta.$$

Так как по формуле (44) в рассматриваемом случае:

$$S - r = \delta \operatorname{tg} \theta (r - 1),$$

то (98) принимает вид:

$$\Delta\theta = \delta \operatorname{tg}^2 \theta \frac{r - 1}{r + 1}$$

и

$$\Delta_2\theta = \delta \left[ 1 + \operatorname{tg}^2 \theta \frac{r - 1}{r + 1} \right] = \delta \frac{r + \cos 2\theta}{\cos^2 \theta (r + 1)}. \quad (99)$$

Заметим, что величина  $\operatorname{tg}^2 \theta \frac{r - 1}{r + 1}$  очень мала; поэтому приближенно можно положить  $\Delta_2\theta = \delta$ .

Применим формулы (40), (7), (5), (70)

$$\delta = \frac{K \cos \theta}{r + \cos 2\theta}; \quad K = \frac{A}{2V_\infty} = -\frac{Id}{4\pi V_\infty (r-1)};$$

$$I = -\pi b\beta V_\infty \sqrt{\rho^2 + 2\rho \cos 2\theta + 1} \frac{(\rho - \varepsilon)^2}{\rho^2 (\rho + 1 - 2\varepsilon)}.$$

Подставляя эти значения в (99), получим:

$$\Delta_2 \theta = \frac{b\beta}{2\rho} \frac{\sqrt{\rho^2 + 2\rho \cos 2\theta + 1} (\rho - \varepsilon)^2}{(\rho^2 - 1) (\rho + 1 - 2\varepsilon) \cos \theta}. \quad (100)$$

Это и есть окончательная формула уменьшения предельного угла атаки при действии закрылка.

Сравнивая ее с соответствующей формулой увеличения угла атаки для предкрылка (80), получим:

$$\frac{\Delta_2 \theta}{\Delta_1 \theta} = \sqrt{\frac{\rho^2 + 2\rho \cos 2\theta + 1}{\rho^2 - 2\rho \cos 2\theta + 1}} \left( \frac{\rho - \varepsilon}{\rho + \varepsilon} \right)^2 \left( \frac{\rho - 1 + 2\varepsilon}{\rho + 1 - 2\varepsilon} \right). \quad (101)$$

Переходим теперь к учету изменения подъемной силы при предельном угле атаки при действии закрылка.

Проводя то же рассуждение, как в предшествующем параграфе, получим:

$$\Gamma (\theta_0 - \Delta_2 \theta) = -4\pi V_\infty \sin (\theta_0 - \Delta_2 \theta) + I (\theta - \Delta_2 \theta) \frac{d}{r-1}.$$

Циркуляция при отсутствии закрылка при предельном угле атаки  $\theta_0$  определяется формулой:

$$\Gamma_0 (\theta_0) = -4\pi V_\infty \sin \theta_0.$$

Отсюда

$$\Delta \Gamma = \Gamma (\theta_0 - \Delta_2 \theta) - \Gamma_0 (\theta_0) = 4\pi V_\infty \cdot 2 \sin \frac{\Delta_2 \theta}{2} \cos \left( \theta_0 - \frac{\Delta_2 \theta}{2} \right) + I (\theta_0 - \Delta_2 \theta) \frac{d}{r-1}$$

или, заменяя  $\sin \frac{\Delta_2 \theta}{2}$  через  $\frac{\Delta_2 \theta}{2}$  и замечая, что  $\Delta \Gamma$  и  $I$  отрицательно:

$$|\Delta \Gamma| = |I (\theta_0 - \Delta_2 \theta)| \frac{\rho + 1}{\rho - 1} - 4\pi V_\infty \Delta_2 \theta \cos \left( \theta_0 - \frac{\Delta_2 \theta}{2} \right)$$

и отсюда увеличение подъемной силы от закрылка равно:

$$\Delta_2 P = \sigma V_\infty \left[ |I (\theta_0 - \Delta_2 \theta)| \frac{\rho + 1}{\rho - 1} - 4\pi V_\infty \Delta_2 \theta \cos \left( \theta_0 - \frac{\Delta_2 \theta}{2} \right) \right]. \quad (103)$$

Так же, как и в случае предкрылка, можно дать  $\Delta_2 P$  весьма простое выражение. Замечая, что из (40), (7) и (5)

$$I = -4\pi V_\infty \delta \frac{(r-1) (r + \cos 2\theta)}{d \cos \theta}$$

и, заменяя здесь  $\delta$  через  $\Delta_2 \theta$  из (99), получим:

$$I = -4\pi V_\infty \Delta_2 \theta \cos \theta \frac{(r+1) (r-1)}{d}.$$

Подставляя в (103), получим:

$$\Delta_2 P = \sigma V_\infty \left[ 4\pi V_\infty \Delta_2 \theta \cos (\theta_0 - \Delta_2 \theta) \frac{(r+1) (r-1) (\rho+1)}{d (\rho-1)} - 4\pi V_\infty \Delta_2 \theta \cos \left( \theta_0 - \frac{\Delta_2 \theta}{2} \right) \right]$$

или

$$\Delta_2 P = 4\pi\sigma V_\infty^2 \Delta_2 \Theta \left[ \cos(\Theta_0 - \Delta_2 \Theta) \frac{(\rho+1)^2}{2\rho} - \cos\left(\Theta_0 - \frac{\Delta_2 \Theta}{2}\right) \right].$$

Отсюда получим приближенную формулу, опуская  $\Delta_2 \Theta$  в аргументах при  $\cos(\Theta_0 - \Delta_2 \Theta)$  и  $\cos\left(\Theta_0 - \frac{\Delta_2 \Theta}{2}\right)$ :

$$\Delta_2 P = 4\pi\sigma V_\infty^2 \Delta_2 \Theta \cos \Theta_0 \frac{\rho^2+1}{2\rho} \quad (103')$$

и так же, как в случае предкрылка

$$\frac{\Delta_2 P}{P} = \text{ctg } \Theta_0 \frac{\rho^2+1}{2\rho} \Delta_2 \Theta. \quad (103'')$$

#### § 4. Комбинация предкрылка и закрылка

Из выведенных формул легко получить соответствующие формулы для случая, когда крыло находится одновременно под действием предкрылка и закрылка. Так как было показано, что можно при вычислении величины циркуляции добавочного вихря не учитывать влияние симметричного вихря, то циркуляции предкрылка  $I_1$  и закрылка  $I_2$  могут быть определены по формуле (69), задавая  $\rho_1, \mu_1, b_1, \beta_1$  для предкрылка и соответствующие значения  $\rho_2, \mu_2, b_2, \beta_2$  для закрылка. Отсюда по формулам (86) найдем  $\Delta_1 \Theta$  и  $\Delta_2 \Theta$  — углы увеличения предельного угла для предкрылка и уменьшения его для закрылка.

Соответствующий угол увеличения предельного угла для совместного действия предкрылка и закрылка  $\Delta_3 \Theta$  определится по формуле:

$$\Delta_3 \Theta = \Delta_1 \Theta - \Delta_2 \Theta. \quad (104)$$

Если для предкрылка  $\mu$  близко к  $\pi$  и для закрылка  $\mu$  близко к 0, как это было выше принято, то для вычисления  $\Delta_1 \Theta$  и  $\Delta_2 \Theta$  можно взять формулы (89) и (100), подставив в них соответствующие значения для  $\rho, \mu, b$  и  $\beta$ .

В присутствии двух вихрей характеристическая функция обтекания цилиндра удовлетворяет уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} = V_\infty e^{-\Theta i} \left( 1 - \frac{e^{2\Theta i}}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} + \frac{I_1}{2\pi i} \left( \frac{1}{z-a_1} - \frac{1}{z-\bar{a}_1} \right) + \\ + \frac{I_2}{2\pi i} \left( \frac{1}{z-a_2} - \frac{1}{z-\bar{a}_2} \right). \end{aligned} \quad (105)$$

Считая критической точкой, точкой схода струй, как и выше, точку  $z=1$ , получим:

$$\begin{aligned} V_\infty e^{-\Theta i} \left( 1 - e^{2\Theta i} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} + \frac{I_1}{2\pi i} \left( \frac{1}{1-a_1} - \frac{1}{1-\bar{a}_1} \right) + \\ + \frac{I_2}{2\pi i} \left( \frac{1}{1-a_2} - \frac{1}{1-\bar{a}_2} \right) = 0, \end{aligned}$$

причем

$$a_1 = \rho_1 e^{\mu_1 i}; \quad \bar{a}_1 = \frac{1}{\rho_1} e^{\mu_1 i}; \quad a_2 = \rho_2 e^{\mu_2 i}; \quad \bar{a}_2 = \frac{1}{\rho_2} e^{\mu_2 i}.$$

Отсюда

$$\Gamma = -4\pi V_\infty \sin \Theta + I_1 \frac{d_1}{r_1 - \cos \mu_1} + I_2 \frac{d_2}{r_2 - \cos \mu_2}, \quad (106)$$

где

$$d_1 = \frac{1}{2} \left( \rho_1 - \frac{1}{\rho_1} \right); \quad r_1 = \frac{1}{2} \left( \rho_1 + \frac{1}{\rho_1} \right); \quad d_2 = \frac{1}{2} \left( \rho_2 - \frac{1}{\rho_2} \right); \quad r_2 = \frac{1}{2} \left( \rho_2 + \frac{1}{\rho_2} \right).$$

Из (106) получим для предельного увеличения подъемной силы при действии предкрылка и закрылка:

$$\Delta P = \sigma V_{\infty} |\Delta \Gamma| = \sigma V_{\infty} \left\{ 4\pi V_{\infty} \Delta_3 \Theta \cos \left( \Theta_0 + \frac{\Delta_3 \Theta}{2} \right) + |I_1 (\Theta_0 + \Delta_3 \Theta)| \frac{d_1}{r_1 - \cos \mu_1} + |I_2 (\Theta_0 + \Delta_3 \Theta)| \frac{d_2}{r_2 - \cos \mu_2} \right\}, \quad (107)$$

причем, как и выше, обычно можно принять  $\mu_1 = \pi$  и  $\mu_2 = 0$ .

## § 5. Сводка формул, числовые примеры

В настоящем параграфе мы соберем все формулы, которые служат для оценки величины влияния на подъемную силу предкрылка или закрылка.

### 1. Общие формулы

#### I

Определение интенсивности вихря, заменяющего предкрылок или закрылок:

$$\begin{aligned} \frac{I^2}{\pi^2 b^2 \beta^2} = & V_{\infty}^2 \left\{ 1 - \frac{2}{\rho^2} \cos 2(\Theta - \mu) + \frac{1}{\rho^4} + \right. \\ & \left. + 2 \sin(\Theta - \mu) \left( 1 + \frac{1}{\rho^2} \right) \times \right. \\ & \times \left[ -2V_{\infty} \frac{\sin \Theta}{\rho} + \frac{I}{2\pi V_{\infty}} \frac{d}{r - \cos \mu} \cdot \frac{1}{\rho} - \frac{I}{2\pi V_{\infty}} \frac{1}{\rho - \frac{1}{\rho}} \right] + \\ & \left. + \left[ -2V_{\infty} \frac{\sin \Theta}{\rho} + \frac{I}{2\pi V_{\infty}} \frac{d}{r - \cos \mu} \cdot \frac{1}{\rho} - \frac{I}{2\pi V_{\infty}} \frac{1}{\rho - \frac{1}{\rho}} \right]^2 \right\} \times \\ & \times \frac{[\rho^2 - 2\varepsilon \rho \cos \mu + \varepsilon^2]^2}{(\rho^2 - 2\rho \cos \mu + 1)(\rho^2 + 2(1 - 2\varepsilon)\rho \cos \mu + (1 - 2\varepsilon)^2)}. \end{aligned} \quad (68)$$

#### II

Определение угла смещения  $\delta$ .

$$\delta = - \frac{Id}{4\pi V_{\infty}} \frac{\cos(\Theta - \mu)}{(r - \cos \mu)} \frac{1}{r + \cos(2\Theta + \mu)}. \quad (38)$$

#### III

Предкрылок. Циркуляция вокруг предкрылка (приблизительно):

$$I = -\pi b \beta V_{\infty} \sqrt{1 - \frac{2 \cos 2\Theta}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{(\rho + \varepsilon)^2}{(\rho - 1 + 2\varepsilon)}}. \quad (71)$$

Смещение критической точки:

$$\delta = \frac{Id \cos \Theta}{4\pi V_{\infty} (r+1)(r - \cos 2\Theta)}. \quad (40') \text{ и } (40'')$$

Увеличение предельного угла атаки:

$$\Delta_1 \Theta = 2 \frac{b \beta \sqrt{\rho^2 - 2\rho \cos 2\Theta + 1}}{I \cdot \rho (\rho^2 - 1) (\rho - 1 + 2\varepsilon) \cos \Theta} (\rho + \varepsilon)^2 (1 - \varepsilon) \quad (89)$$

или

$$\Delta_1 \Theta = |\delta| \frac{r - \cos 2\Theta}{\cos^2 \Theta (r - 1)}. \quad (88)$$

Предельное увеличение подъемной силы:

$$\begin{aligned} \Delta_1 P = & \sigma V_{\infty} \left\{ 4\pi V_{\infty} \Delta_1 \Theta \cos \left( \Theta_0 + \frac{\Delta_1 \Theta}{2} \right) + |I (\Theta + \Delta_1 \Theta)| \frac{d}{r+1} \right\} \\ \frac{\Delta_1 P}{P} = & \operatorname{ctg} \Theta_0 \frac{\rho^2 + 1}{2\rho} \Delta_1 \Theta. \end{aligned} \quad (91)$$

1) Величину  $I$  см. далее, стр. 37.

#### IV

Закрылок. Циркуляция вокруг закрылка:

$$I = -\pi b \beta V_{\infty} \sqrt{1 + \frac{3 \cos 2\theta}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{(\rho - \varepsilon)^2}{\rho(\rho + 1 - 2\varepsilon)}} \quad (71)$$

Смещение критической точки:

$$\delta = -\frac{Jd \cos \theta}{4\pi V_{\infty} (r - 1)(r + \cos 2\theta)} \quad (40) \text{ и } (40'')$$

Уменьшение предельного угла атаки:

$$\Delta_2 \theta = 2 \frac{b \beta \sqrt{\rho^2 + 2\rho \cos 2\theta + 1} (\rho - \varepsilon)^2 (1 - \varepsilon)}{l \cdot \rho (\rho^2 - 1) (\rho + 1 - 2\varepsilon) \cos \theta} \quad (100)$$

или

$$\Delta_2 \theta = \delta \frac{r + \cos 2\theta}{\cos^2 \theta (r + 1)} \quad (99)$$

Предельное увеличение под'емной силы:

$$\Delta_2 P = \sigma V_{\infty} \left[ |I(\theta_0 - \Delta_2 \theta)| \frac{\rho + 1}{\rho - 1} - 4\pi V_{\infty} \Delta_2 \theta \cos \left( \theta_0 - \frac{\Delta_2 \theta}{2} \right) \right] \quad (103)$$

$$\frac{\Delta_2 P}{P} = \operatorname{ctg} \theta_0 \frac{\rho^2 + 1}{2\rho} \Delta_2 \theta.$$

#### V

Комбинация предкрылка и закрылка.

Циркуляция вокруг предкрылка и закрылка вычисляется по формулам (71) (где надо положить  $b_1, \beta_1, \rho_1$ , определяемые размерами и положением предкрылка) и (72) (где надо положить  $b_2, \beta_2, \rho_2$ , определяемые закрылком).

Увеличение предельного угла атаки

$$\Delta_3 \theta = \Delta_1 \theta - \Delta_2 \theta,$$

где  $\Delta_1 \theta$  вычисляется по формуле (89) с подстановкой  $b_1, \beta_1, \rho_1$  и  $\Delta_2 \theta$  вычисляется по формуле (100) с подстановкой  $b_2, \beta_2, \rho_2$ . Предельное увеличение под'емной силы:

$$\Delta P = \sigma V_{\infty} \left\{ 4\pi V_{\infty} \Delta_3 \theta \cos \left( \theta_0 + \frac{\Delta_3 \theta}{2} \right) + |I_1(\theta_0 + \Delta_3 \theta)| \frac{d_1}{r_1 - \cos \mu_1} + \right. \\ \left. + |I_2(\theta_0 + \Delta_3 \theta)| \frac{d_2}{r_2 - \cos \mu_2} \right\}. \quad (107)$$

Обозначения.

Во всех предшествующих формулах положение изображения вихря, заменяющего предкрылок или закрылок, на плоскости  $z$  (круглого цилиндра) определяется точкой  $a = \rho e^{ui}$ .

$$r = \frac{1}{2} \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right); \quad d = \frac{1}{2} \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right).$$

В отделе V (комбинация предкрылка и закрылка) величины, относящиеся к предкрылку, отмечены значком 1 и относящиеся к закрылку — значком 2 (например  $\rho_1, \mu_1; \rho_2, \mu_2$  и т. д.).

Хорда предкрылка или закрылка  $b$ . Угол атаки предкрылка или закрылка  $\beta$ ; хорда крыла  $l$ .

### § 6. Числовые примеры

Переходим к приложению выведенных формул к числовым расчетам. В случае предкрылка:

$$\Delta_1 \theta = \frac{b \beta}{2\rho} \frac{\sqrt{\rho^2 - 2\rho \cos 2\theta + 1} (\rho + \varepsilon)^2}{(\rho^2 - 1) (\rho - 1 + 2\varepsilon) \cos \theta_0}, \quad (89)$$

но длина хорды крыла, которую можно определить по формуле (9) стр. 29 первой части работы, имеющей в рассматриваемом случае ( $\alpha=0$ ) вид:

$$\zeta = z - 2 + \varepsilon + \frac{(1-\varepsilon)^2}{z-\varepsilon}, \quad (108)$$

подставляя  $z=1$  и  $z=-1$ , как легко подсчитать, равна  $4(1-\varepsilon)$ ; поэтому формула (89) может быть написана в виде:

$$\Delta_1 \Theta = 2\beta \frac{b}{l} \frac{\sqrt{\rho^2 - 2\rho \cos 2\Theta + 1} (\rho + \varepsilon)^2 (1 - \varepsilon)}{(\rho^2 - 1)(\rho - 1 + 2\varepsilon) \cos \Theta},$$

где  $\Theta = \Theta_0 + \Delta_1 \Theta$ . Разлагая правую часть по степеням и ограничиваясь первой степенью  $\Delta_1 \Theta$ , получим:

$$\Delta_1 \Theta = 2\beta \frac{b}{l} \frac{(\rho + \varepsilon)^2 (1 - \varepsilon)}{(\rho^2 - 1)(\rho - 1 + 2\varepsilon)} \left\{ \frac{\sqrt{\rho^2 - 2\rho \cos 2\Theta_0 + 1}}{\cos \Theta_0} + \right. \\ \left. + \frac{d}{d\Theta} \left[ \frac{\sqrt{\rho^2 - 2\rho \cos 2\Theta + 1}}{\cos \Theta} \right]_{\Theta = \Theta_0} \cdot \Delta_1 \Theta \right\}. \quad (109)$$

Но

$$\frac{d}{d\Theta} \frac{\sqrt{\rho^2 - 2\rho \cos 2\Theta + 1}}{\cos \Theta} = \frac{\sin \Theta (\rho + 1)^2}{\cos^2 \Theta \sqrt{\rho^2 - 2\rho \cos 2\Theta + 1}},$$

поэтому (109) можно переписать в виде:

$$\Delta_1 \Theta = 2\beta \frac{b}{l} \frac{(\rho + \varepsilon)^2 (1 - \varepsilon)}{\rho (\rho^2 - 1)(\rho - 1 + 2\varepsilon)} \left\{ \frac{\sqrt{\rho^2 - 2\rho \cos 2\Theta_0 + 1}}{\cos \Theta_0} + \right. \\ \left. + \frac{\sin \Theta_0 (\rho + 1)^2}{\cos^2 \Theta_0 \sqrt{\rho^2 - 2\rho \cos 2\Theta_0 + 1}} \cdot \Delta_1 \Theta \right\}. \quad (110)$$

Полагая

$$A = 2\beta \frac{b}{l} \frac{(\rho + \varepsilon)^2 (1 - \varepsilon)}{\rho (\rho^2 + 1)(\rho - 1 + 2\varepsilon)}; \\ B = \frac{\sqrt{\rho^2 - 2\rho \cos 2\Theta_0 + 1}}{\cos \Theta_0}; \quad (111)$$

$$C = \frac{\sin \Theta_0 (\rho + 1)^2}{\cos^2 \Theta_0 \sqrt{\rho^2 - 2\rho \cos 2\Theta_0 + 1}},$$

перепишем (110) в виде:

$$\Delta_1 \Theta = A (B + C \Delta_1 \Theta),$$

откуда

$$\Delta \Theta = \frac{AB}{1 - AC}. \quad (112)$$

Формулы (111) и (112) и могут служить для практического расчета величины  $\Delta_1 \Theta$ .

Пример. Предкрылок с данными:

$$\beta = 15^\circ; \quad \frac{b}{l} = 0,2; \quad \rho = 1,5^\circ; \quad \varepsilon = 0,2; \quad \Theta_0 = 15^\circ.$$

$$A = 2 \cdot 0,2 \cdot 0,262 \frac{1,7^2 \cdot 0,8}{1,5 \cdot 1,25 \cdot 0,9};$$

$$B = \frac{\sqrt{0,652}}{\cos 15^\circ};$$

$$C = \frac{\sin 15^\circ \cdot 6,25}{\cos^2 15^\circ \sqrt{0,652}}.$$

Отсюда

$$AB = 0,118; \quad AC = 0,304$$

$$\Delta_1 \Theta = 0,169$$

$$\Delta_1 \Theta = 9^\circ 44'.$$

или

Заметим, что формула (112) заменяет формулу (3) стр. 61 первой части.

Зная  $\Delta_1\theta$ , легко подсчитать увеличение подъемной силы по формуле:

$$\frac{\Delta_1 P}{P} = \operatorname{ctg} \theta_0 \frac{\rho^2 + 1}{2\rho} \Delta_1 \theta.$$

В рассматриваемом примере

$$\frac{\Delta_1 P}{P} = \operatorname{ctg} 15^\circ \frac{3,25}{3} \cdot 0,169 = 0,68,$$

т. е. увеличение составляет 68%.

Приведенный расчет находится в хорошем согласии с результатами наблюдений<sup>1)</sup>.

Приведенные вычисления сейчас же переносятся и на случай закрылка. Согласно формулы (100)

$$\Delta_2 \theta = \frac{b\beta}{2\rho} \frac{\sqrt{\rho^2 + 2\rho \cos 2\theta + 1} (\rho - \varepsilon)^2}{(\rho^2 - 1) (\rho + 1 - 2\varepsilon) \cos \theta},$$

что можно еще написать в виде:

$$\Delta_2 \theta = 2\beta \frac{b}{l} \frac{\sqrt{\rho^2 + 2\rho \cos 2\theta + 1} (\rho - \varepsilon)^2 (1 - \varepsilon)}{\rho (\rho^2 - 1) (\rho + 1 - 2\varepsilon) \cos \theta}. \quad (113)$$

Так как  $\theta = \theta_0 - \Delta_2 \theta$ , то, замечая, что

$$\frac{d}{d\theta} \frac{\sqrt{\rho^2 + 2\rho \cos 2\theta + 1}}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta (\rho - 1)^2}{\cos^2 \theta \sqrt{\rho^2 + 2\rho \cos 2\theta + 1}},$$

и ограничиваясь первыми степенями  $\Delta_2 \theta$ , получим:

$$\Delta_2 \theta = 2\beta \frac{b}{l\rho} \frac{(\rho - \varepsilon)^2 (1 - \varepsilon)}{(\rho^2 - 1) (\rho + 1 - 2\varepsilon)} \left\{ \frac{\sqrt{\rho^2 + 2\rho \cos 2\theta_0 + 1}}{\cos \theta_0} - \frac{\sin \theta_0 (\rho - 1)^2}{\cos^2 \theta_0 \sqrt{\rho^2 + 2\rho \cos 2\theta_0 + 1}} \cdot \Delta_2 \theta \right\}. \quad (114)$$

Полагая

$$A = 2\beta \frac{b}{l} \frac{(\rho - \varepsilon)^2 (1 - \varepsilon)}{\rho (\rho^2 - 1) (\rho + 1 - 2\varepsilon)}$$

$$B = \frac{\sqrt{\rho^2 + 2\rho \cos 2\theta_0 + 1}}{\cos \theta_0} \quad (115)$$

$$C = \frac{\sin \theta_0 (\rho - 1)^2}{\cos^2 \theta_0 \sqrt{\rho^2 + 2\rho \cos 2\theta_0 + 1}},$$

перепишем (114) в виде:

$$\Delta_2 \theta = A (B - C \Delta_2 \theta),$$

откуда

$$\Delta_2 \theta = \frac{AB}{1 + AC}. \quad (116)$$

Формулы (115) и (116) позволяют произвести расчет в случае закрылка.

Пример. Закрылок:

$$\beta = 15^\circ; \quad \frac{b}{l} = 0,3; \quad \rho = 2, \quad \varepsilon = 0,2; \quad \theta_0 = 15^\circ.$$

$$A = 2 \cdot 0,262 \cdot 0,3 \frac{1,8^2 \cdot 0,8}{2 \cdot 3 \cdot 2,6}$$

$$B = \frac{\sqrt{8,464}}{\cos 15^\circ}$$

$$C = \frac{\sin 15^\circ}{\cos^2 15^\circ \sqrt{8,464}}.$$

1) См. например, первую часть работы фиг. 5 и 6, стр. 8.

Отсюда

$$AB=0,0734; \quad AC=0,0025$$

и

$$\Delta_2\theta=0,0735,$$

т. е.

$$\Delta_2\theta=4^{\circ}13'.$$

Заметим, что здесь влияние поправки от  $\Delta_2\theta$  ничтожно и можно найти  $\Delta_2\theta$  по формуле:

$$\Delta_2\theta=AC,$$

т. е.

$$\Delta_2\theta=2\beta \frac{b}{l} \frac{(\rho-\varepsilon)^2(1-\varepsilon)}{\rho(\rho^2-1)(\rho+1-2\varepsilon)} \frac{\sqrt{\rho^2+2\cos 2\theta_0+1}}{\cos \theta_0}. \quad (117)$$

Зная  $\Delta_2\theta$ , легко найдем увеличение подъемной силы по формуле:

$$\frac{\Delta P}{P}=\operatorname{ctg} \theta_0 \frac{\rho^2+1}{2\rho} \Delta_2\theta.$$

В рассматриваемом примере имеем:

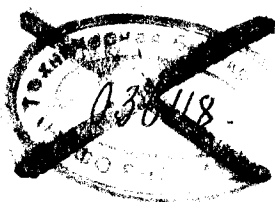
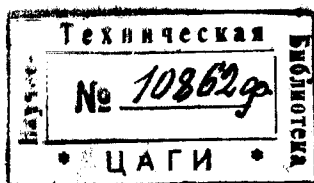
$$\frac{\Delta P}{P}=3,73 \cdot 1,25 \cdot 0,0735,$$

откуда

$$\frac{\Delta P}{P}=0,34,$$

т. е. увеличение подъемной силы составляет 34%.

В окончательном итоге мы видим, что предкрылок весьма мало увеличивает циркуляцию, но зато резко увеличивает предельный угол атаки, а вместе с тем и подъемную силу, а закрылок незначительно уменьшает предельный угол атаки, но зато резко увеличивает циркуляцию, что в свою очередь значительно увеличивает подъемную силу.



## S U M M A R Y

In the first part a theory of the slot action is developed based on the theory of flow separation in a laminar boundary layer.

The real flow conditions around an aerofoil are usually quite different from those corresponding to a laminar boundary layer. In the present investigation the boundary layer is not assumed to be laminar.

In the discussion of a flow around an aerofoil a vortex is substituted for a flap and slat according to the method applied in the first part of the paper.

The investigation of the effect of the vortex on the velocity distribution around the aerofoil leads to following conclusions:

1. The vortex shifts the stagnation point at the leading edge of the aerofoil.

2. Changes the velocity distribution around the aerofoil.

In the case of a slot the shifting of the stagnation point leads to an increase of the stalling angle of incidence of the aerofoil and in the case of a flap—to a decrease of this angle.

Besides the slot effect results in a decrease of velocity at the leading edge and gives a smoother flow over the upper surface of the aerofoil. The flap increases the velocity at the leading edge.

Thus it is possible without altering the flow conditions around the aerofoil to increase the stalling angle by the value  $\Delta_1\theta$  which may be determined from the following formula

$$\Delta_1\theta = 2 \frac{b\beta \sqrt{\rho^2 - 2\rho \cos 2\theta + 1} (\rho + \varepsilon)^2}{l \cdot \rho (\rho^2 - 1) (\rho - 1 + 2\varepsilon) \cos \theta_0}$$

differing from the formula given in first part of the present investigation by the factor  $\frac{1}{\cos^2 \theta}$ .

The flap gives a decrease of the stalling angle of the aerofoil the value of which may be expressed as follows:

$$\Delta_2\theta = 2 \frac{b\beta \sqrt{\rho^2 + 2\rho \cos 2\theta + 1} (\rho - \varepsilon)^2}{l \cdot \rho (\rho^2 - 1) (\rho + 1 - 2\varepsilon) \cos \theta_0}$$

The vortices substituting the slat or flap change the general circulation around a slotted aerofoil and lead to an increase of lift which is greater for a flap and smaller for a slat. In the paper some formulae are presented for the computation of the lift increase in the case of a slat (91) and in the case of a flap (103).

At the end of the paper the combined effect both of slats and flaps is discussed.

<sup>1</sup> Investigation into the theory of slotted aeroplane wing. Part 1 by W. W. Goloubeff. Transact. of the Joukovsky Central Institute of aero-hydrodynamics. № 147. 1933. See, also Theory of the Slat in a two-dimensional Flow by prof. V. Golubev. The Journal of the R. A. S. № 309, 1936.